HUGO STEINHAUS

INSTANTANEAS MATEMATICAS

BIBLIOTECA CIENTIFICA SALVAT

HUGO STEINHAUS

INSTANTANEAS MATEMATICAS

SALVAT

Versión española de la tercera edición de la obra norteamericana *Mathematical snapshots* publicada por Oxford University Press, Inc. de Nueva York

Traducción: Luis Bou García

Escaneado y Edición digital: Sargont (2018)

ISBN 0-19-503267-5 Edición original
ISBN 84-345-8246-5 Obra completa
ISBN 84-345-8428-X
Depósito legal NA-1153-1986
Publicada por Salvat Editores, S.A. - Mallorca, 47 - 08029 Barcelona
Impreso por Gráficas Estella, S.A. Estella (Navarra)-1987
Printed in Spain

Índice de capítulos

Prólogo

Sea más que bienvenida esta nueva y tercera edición, ampliada, de las *Instantáneas Matemáticas* de Steinhaus.

Es preciso no confundir este libro con las numerosas obras de divertimentos, rompecabezas y paradojas. Aunque tales libros puedan ser amenos, su contenido matemático acostumbra a ser de escasa importancia, cuando no trivial. Muchos, por ejemplo, presentan demostraciones falsas, y se desafía al lector a descubrir las falacias.

El profesor Steinhaus no se ocupa de tales pasatiempos. Sus «instantáneas» se refieren a fragmentos seleccionados, espigados de entre las diversas partes de la matemática elemental. Estos fragmentos tocan temas plenamente matemáticos, que no es corriente encontrar ni en los textos ni en los libros de carácter popular. Muchos tienen aplicación a problemas reales, y Steinhaus presenta tales aplicaciones. El gran mérito de los temas que ha elegido es que, sobre ser deliciosos, nos dejan atónitos e intrigados. Grande es la diversidad de sus temas. Contiene construcciones geométricas infrecuentes, juegos plenos de contenido matemático, lúcidos razonamientos sobre triángulos, cuadrados, poliedros y círculos, así como otros aspectos muy novedosos. Todos ellos son independientes, por lo que cada cual puede concentrarse en los que le atraigan más. Todos interesan, y, muchas veces, apasionan.

El profesor Steinhaus explica las matemáticas, y sus espléndidas figuras y excelentes fotografías son de inmensa utilidad para la comprensión de lo que nos ha mostrado. No deja Steinhaus de plantearnos cuestiones, cuyas respuestas están muchas veces al alcance de casi todos los lectores; pero es preciso advertir al lector de que la solución de algunas de ellas ha resistido hasta la fecha los esfuerzos de los más grandes matemáticos. La demostración matemática requiere más que la pura intuición, que inferencia a partir de casos particulares, o que evidencia visual.

El libro debe —y puede— ser leído por profanos interesados en conocer las sorpresas que la matemática elemental es capaz de ofrecernos. El profe-

sor Steinhaus es un matemático muy distinguido, y, como demuestra el hecho de haber emprendido la presentación de ciertos rasgos insólitos, aunque elementales, de las matemáticas, está seriamente interesado en la difusión del conocimiento y pensamiento matemáticos. El atento lector podrá, al tiempo que disfruta con el material que le es presentado, aprender sólidas nociones matemáticas, lo cual reviste hoy tanta importancia como en 1938, fecha de la primera edición polaca de este libro.

MORRIS KLINE
Professor Emeritus de Matemáticas
del Instituto Courant de Ciencias Matemáticas.
Universidad de Nueva York

Prefacio

Quisiera, al presentar este libro al lector, poder evitar el riesgo de ser mal entendido, riesgo que todo matemático corre al dirigirse al público no especializado. No tengo el propósito de enseñar (en el sentido habitual del término) ni de divertir, al lector con unas cuantas charadas. Lo que ocurre es que durante un precioso día de verano me hicieron esta pregunta: «Afirma usted ser matemático. Bueno, ¿y, cuando se es matemático, a qué se dedica uno todo el día?». Estábamos, mi interlocutor y yo, sentados en un parque, y me esforcé en explicarle unos cuantos problemas geométricos, resueltos unos, y otros no, ayudándome de un palito para trazar en el albero una curva de Jordán, una curva de Peano... Así fue como se concibió este libro, en el cual los dibujos, diagramas y fotografías facilitan un lenguaje directo y permiten evitar las demostraciones, o, al menos, reducirlas a un mínimo.

H. STEINHAUS

1. Triángulos, cuadrados y juegos

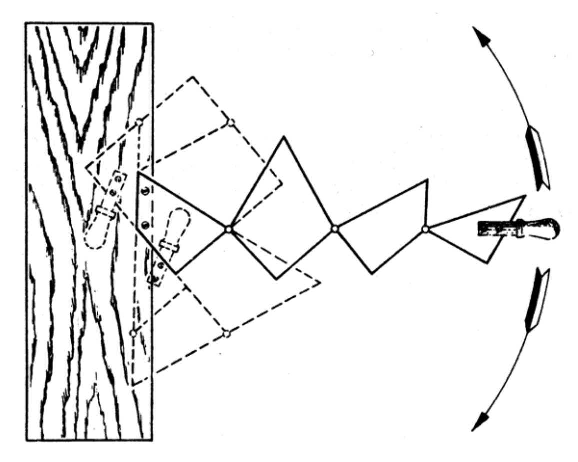


Fig. 1

Con estas cuatro pequeñas piezas planas **(1)** podemos *componer* un *cuadrado* o un *triángulo* equilátero, según llevemos el mango hacia arriba o hacia abajo. La demostración viene dada mediante un dibujo **(2).**

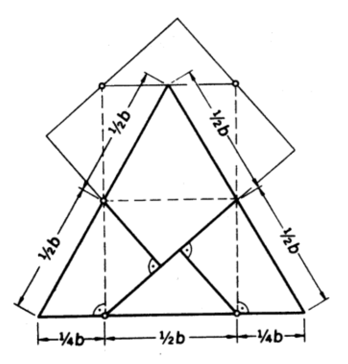


Fig. 2

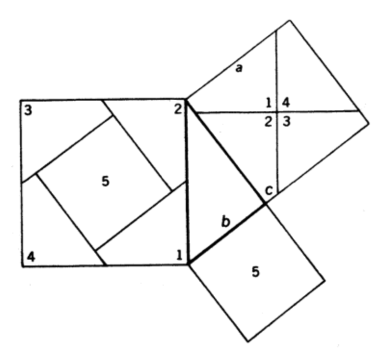


Fig. 3

Para *descomponer* un *cuadrado* en dos cuadrados trazamos un triángulo rectángulo **(3)**; para comprobar que el cuadrado grande es la suma de los otros dos, descomponemos en cuatro piezas el cuadrado mediano, trazando por su centro una recta vertical y otra horizontal, y desplazamos después estas cuatro piezas (por traslación, sin hacerlas girar) llevándolas a ocupar los cuatro vértices del cuadrado grande; la porción de cuadrado no recubierta tiene exactamente el mismo tamaño que el cuadrado pequeño. Para comprobarlo, no tenemos más que observar que $a = b + c$. El significado del teorema así demostrado salta a la vista en cuanto nos fijamos en el triángulo **(4)** de lados 3, 4 y 5 → 9 + 16 = 25. Así pues, podemos trazar un ángulo recto valiéndonos de una cuerda de 1,20 m de longitud, en la que se han hecho nudos separados 3, 4 y 5 dm.

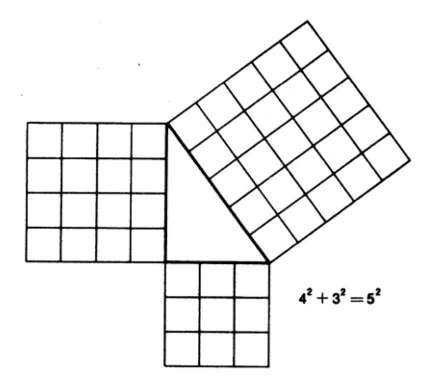


Fig. 4

También podemos comprobar esta propiedad de los *triángulos rectángulos* sin utilizar cuadrados **(5)**.

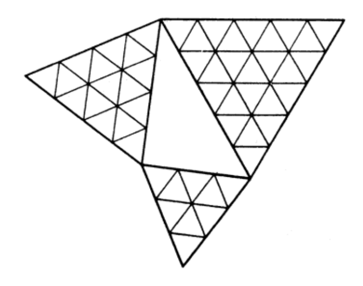


Fig. 5

Tracemos *triángulos equiláteros* sobre los lados de un triángulo *ABC* dado, uno de cuyos ángulos (*C*) sea de 60° **(6).** El área conjunta del triángulo *ABC* primitivo y del triángulo opuesto a C es igual al área conjunta de los restantes triángulos. Demostración **(7)** : 1 + 2 + 3 = 1'+ 2'+ 3'.

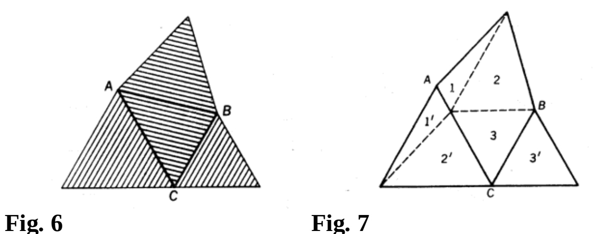


Fig. 6 **Fig. 7**

Para trazar un *triángulo equilátero* podemos partir de un triángulo cualquiera, y trisecar sus ángulos: el pequeño *triángulo* así determinado en el centro del primero es *equilátero* **(8)**.

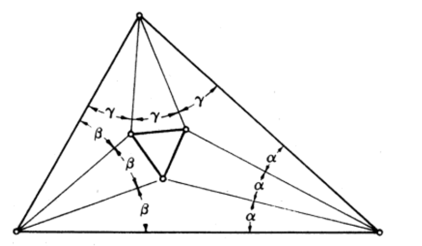
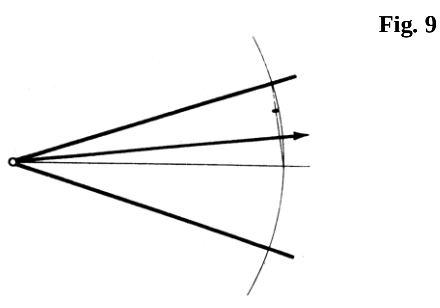


Fig. 8

La *trisección de un ángulo* (su división en tres partes iguales) lo logra con mucha precisión bisecándolo primero **(9)** y dividiendo después la cuerda de cada semi-ángulo en tres partes iguales. El radio que corta a la cuerda a 2/3 de su extremo triseca el ángulo. La construcción sólo es aproximada.

Fig. 9



Es fácil *recubrir un plano con cuadrados* de diferentes tamaños **(10)**. Un problema muy interesante estriba en *dividir un rectángulo* en cuadrados, todos ellos diferentes. Están dados en la página siguiente **(11).** Su número es de 9, y sus lados son 1, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 15, 18. *Problema:* Formar con ellos un rectángulo. Es éste el más sencillo de los problemas de *descomposición* de un rectángulo *en cuadrados* distintos. La descomposición en menos de nueve cuadrados diferentes es imposible.

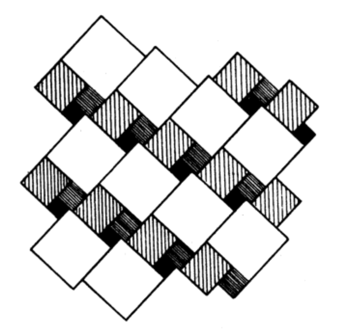


Fig. 10

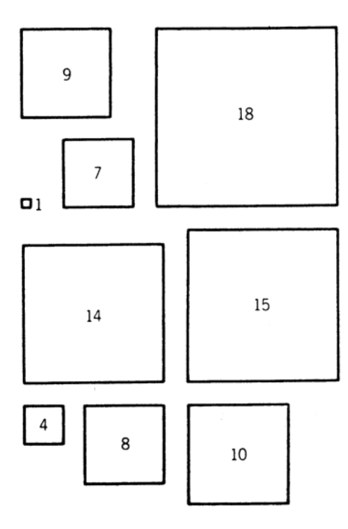


Fig. 11

Es posible *descomponer* un cuadrado *en cuadrados* todos diferentes. Hemos dibujado aquí uno de los casos más sencillos **(12).**

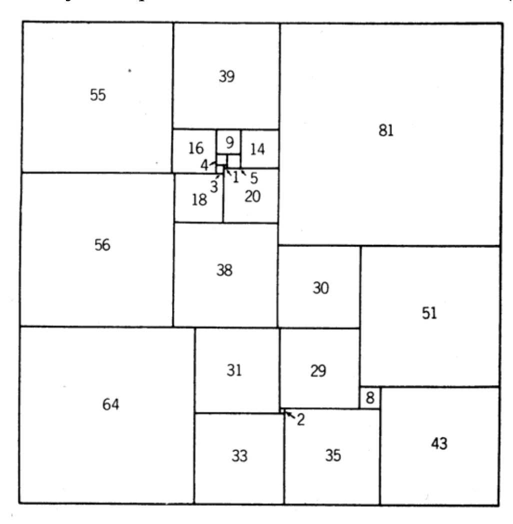


Fig. 12

Los lados de los 24 cuadrados son: 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 14, 16, 18, 20, 29, 30, 31, 33, 35, 38, 39, 43, 51, 55, 56, 64, y 81. ¿Es posible descomponer un cuadrado en menos de 24 cuadrados diferentes?

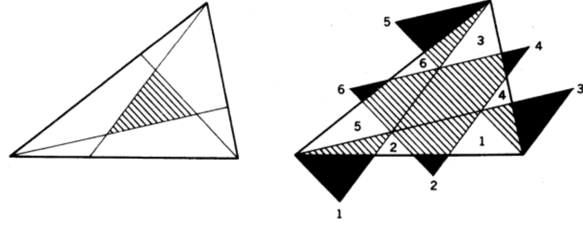


Fig. 13 **Fig. 14**

Para, de un triángulo dado, recortar otro cuya área sea la séptima parte de la total, dividimos **(13)** cada uno de los lados en la razón 1 : 2, y conectamos los puntos de división con los vértices opuestos: el área del triángulo sombreado central es una séptima parte de la total. La demostración se deduce de la figura adjunta **(14)**: las partes negras y sombreadas dan 7 triángulos congruentes, cada uno igual al área sombreada. Dado que los 6 triángulos negros se utilizan para cubrir las partes blancas, los siete triángulos congruentes dan, conjuntamente, el triángulo grande.

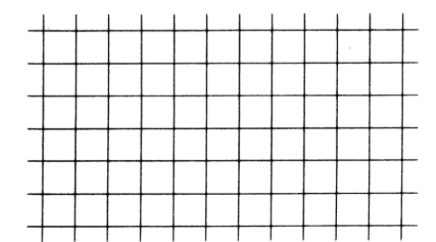


Fig. 15

La más sencilla de las divisiones del plano en cuadrados iguales **(15)** proporciona tableros para muchos juegos. Dos personas pueden jugar a *«tres en raya»* en este casillero de nueve cuadrados **(16)**. Uno de los jugadores dispone de tres piezas blancas; el otro, de tres negras. Los jugadores van colocando por turno sus piezas en el tablero, y, si llegan a colocar las

seis, es lícito mover cada pieza hasta cualquiera de las casillas adyacentes (pero no en diagonal).

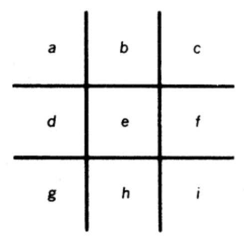


Fig. 16

El primero que logre alinear sus tres piezas, ya sea horizontal, vertical, o diagonalmente, gana la partida. El primer jugador tiene la victoria asegurada si ocupa, en el inicio del juego, la casilla central, y juega después con buen sentido. Pues si las blancas ocupan e las negras, sólo cabe que reaccionen de dos modos: o bien cubriendo una de las casillas de los vértices, o una casilla lateral, entre dos vértices. Si las negras ocupasen a, las blancas deberían ocupar *h,* obligando así a las negras a jugar en *b,* y, después, las blancas tendrían que cubrir *c,* obligando así a las negras a ocupar *g.* Las blancas pasarían entonces en las dos jugadas siguientes, desde *e* a *f* y desde *h* a *l,* y ganarían. Si las negras comienzan eligiendo *b,* las blancas cubren *g,* las negras *c,* blancas *a,* negras *d,* y las blancas pasarían desde *g* a *h* y, después, desde *h* a *i,* jugadas que la pieza negra situada en *c* no podría evitar. Si al primer jugador no se le permite ocupar *e*, el juego, si se desarrolla hábilmente por ambos jugadores, degenerará en una interminable repetición de ciclos idénticos.

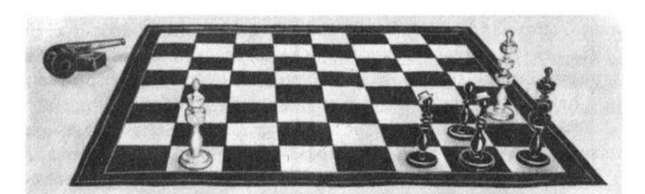


Fig. 17

Hay *en ajedrez* situaciones que permiten un análisis exacto. Por ejemplo, el final de partida del *doctor J. Berger* **(17)** asegura la victoria de las blancas, a condición de que éstas comiencen con la jugada D-D8C. Las

blancas no lograrán vencer si su primera jugada es otra, supuesto que las negras se defiendan con buen sentido. Pero si las blancas comienzan con la jugada ya mencionada, y continúan adecuadamente, en ocho jugadas la partida quedará claramente decidida a su favor. Ciertos finales de partida son famosos en razón de la sagacidad con que sus soluciones se encuentran ocultas. Aunque **(18)** no pertenezca a esta categoría, en modo alguno le resulta fácil al principiante comprender cómo pueden las blancas dar mate en cuatro jugadas, a lo más.

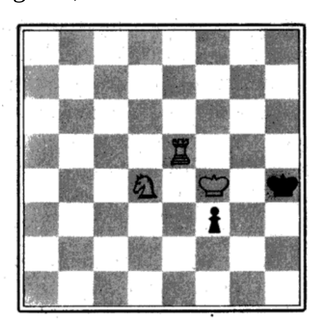


Fig. 18

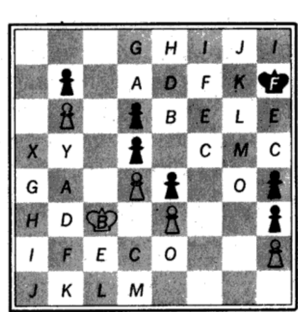


Fig. 19

El final de partida del *doctor K. Ebersz* es de carácter enteramente matemático **(19)**. Puede demostrarse rigurosamente que las blancas no permitirán al rey negro tomar ninguno de sus peones, siempre que las blancas se muevan siempre hacia el cuadrado que el rey negro ocupe entonces. Así, pues, las blancas tienen que comenzar con la jugada *B*-*F*. Si se observa la regla descrita, la partida acabará en tablas, pero si se hace un solo movimiento en falso, las negras impedirán al rey blanco, si lo desean, la aplicación de semejante táctica, e incluso abrir brecha a través de *X*-*V* o de *O*-*O*. Un final de partida interesante consistiría en lograr que las jugadas de un bando estuvieran exactamente determinadas por las de su oponente, terminando también la partida en tablas, de modo que el jugador que primero se saliera de la regla perdiera la partida, en el supuesto de que su oponente continuara jugando de cierto modo, que habría de estar también plenamente determinado.

No es preciso que el lector sea un gran ajedrecista para asegurarse de que en dos partidas simultáneas contra dos campeones, *A* y *B*, el resultado

sea 1:1. Lo único necesario es que *A* juegue con las blancas; *B*, con las negras; y que sea *A* quien abra el juego. El lector, *L*, se limita a reproducir en el tablero de B la jugada de apertura de *A*, comenzando así la partida contra *B*. Tras la réplica de *B*, *L* la traslada al tablero de *A*, dándola como respuesta propia a la jugada de *A*. Por lo tanto, en ambos tableros se estará desarrollando la misma partida. El resultado obtenido por *L* en el primer tablero tan sólo puede ser 1, 0, o 1/2, y en el segundo, 0, 1, o 1/2. Así, en cada caso, *L* gana un punto (1+0, 0+1, o 1/2+1/2), mientras que *A* y *B* ganan entre ambos solamente un total de un punto.

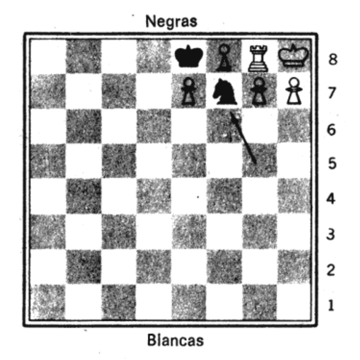


Fig. 20

Con las reglas del ajedrez, las negras ganan cuando logran cantar «mate», lo que significa que el rey blanco no puede evitar ser capturado en la próxima jugada de las negras. La partida se resuelve en tablas cuando se llega a una situación que hace imposible la victoria a los dos jugadores. Existe también una situación llamada «ahogo del rey», que obligaría al «suicidio» de uno de los reyes. En nuestro dibujo (**20**) vemos una situación que no cabe calificarse ni como victoria, ni como tablas, ni como ahogo. La última pieza movida fue el caballo negro. Ahora les toca jugar a las blancas, pero a éstas les es imposible.

No hay una teoría matemática del ajedrez, pero sí la hay para ciertos juegos más sencillos. Por ejemplo, en una caja **(21)** hay *15 tabletas numeradas*, y un cuadro vacío, donde cabe una más. Colóquense las tabletas en la caja en cualquier orden que se desee **(22)**, y después, mediante los movimientos adecuados, vuélvanse a disponer las tabletas en la ordenación pri-

mitiva. La teoría es la siguiente. Llamemos «16» al puesto vacante; entonces, cada permutación de las tabletas es una permutación de los números 1, 2, 3, ..., 15, 16. Ahora, escribiendo esos números, primero en su orden natural 1, 2, ..., 16, e intercambiándolos después adecuadamente con sus vecinos, se obtiene cualquier ordenación que se desee. Por ejemplo, para lograr la colocación 2, 1, 3, 4, 5, ..., 16 basta un intercambio.

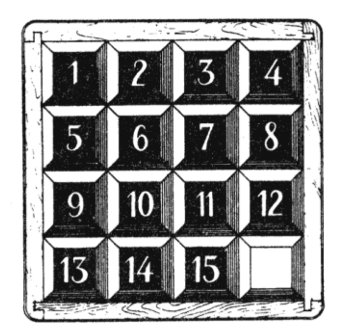


Fig. 21

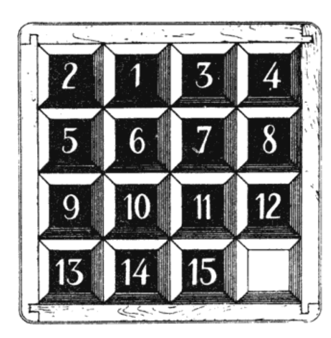


Fig. 22

Cada uno de los intercambios será denominado «jugada» o «movimiento». Ciertas disposiciones requieren un número impar de movimientos; otras lo requieren par. Una disposición alcanzada tras un número impar de movimientos será imposible de lograr, partiendo de la misma posición inicial, mediante un número par. Imaginemos lo contrario: una disposición producida por un número par de movimientos, y la misma disposición originada por un número impar de movimientos. Partamos de la disposición natural, ejecutemos la serie de número par de movimientos, y después, de fin a principio, la serie de movimientos número impar: al cabo, deberíamos de haber recuperado la ordenación natural, por lo que sería posible pasar de la ordenación natural a sí misma mediante un número impar de jugadas. Pero ello es imposible, porque cada jugada es una transposición, o sea, un intercambio de posiciones, entre dos vecinos. Fijémonos primero tan sólo en las jugadas que intercambien el 5 con el 6. La primera jugada de esta clase transforma 56 en 65; la segunda, 65 en 56; y así sucesivamente. Dado que hemos de acabar por restablecer el orden natural 56, el número de jugadas consideradas tiene que ser par. El mismo razonamiento es válido para

el par 1-2, para el par 2-3..., y así hasta el par 15-16: cualquiera que sea la pareja de números consecutivos que se tome, habrá un número par de jugadas que la intercambien. En consecuencia, el número total de jugadas empleadas para pasar desde la ordenación natural hasta sí misma, forzosamente ha de ser par, ya que es el resultado de la suma de números pares.

Podemos, por consiguiente, clasificar todas las colocaciones en dos clases: las colocaciones «pares» y las «impares». Consideraremos cada colocación de las tabletas en la caja como una ordenación de los números, leyéndolos fila por fila, de arriba a abajo. Cuando desplacemos las tabletas en la caja, lo único que podemos hacer es intercambiar el puesto libre «16» con uno de sus vecinos. Si este vecino es el de la derecha, o el de la izquierda, el intercambio es un «movimiento» en el sentido previamente explicado, como si todas las líneas horizontales formasen una sola hilera. Sin embargo, si intercambiamos la tableta «16» con una vecina situada por encima o por debajo de ella, tal paso equivaldrá al intercambio de dos tabletas que, en la hilera total, se encontrasen a distancia 4. Un intercambio así requiere 7 movimientos, es decir, siete intercambios de vecinos. Para resolver nuestro problema tendremos, en todos los casos, que hacer retornar la tableta «16» a su posición inicial en el ángulo inferior derecho: tiene, por consiguiente, que ser desplazada tantas veces hacia la izquierda como hacia la derecha, y tantas veces hacia arriba como hacia abajo. Así, pues, el número de corrimientos horizontales es un número par, $2h$, y el número de corrimientos verticales es también un número par, $2v$. Por lo tanto, el proceso completo es equivalente a $2h$ movimientos más $2v \times 7$ movimientos = $2h+14v$ movimientos, que es un número par. En consecuencia, si a partir de la disposición primitiva se ha de obtener una colocación determinada mediante un número impar de movimientos, el problema de retroceder es insoluble. Por ejemplo, es imposible que moviendo las tabletas se llegue a pasar desde la disposición que vemos en nuestra ilustración hasta la mostrada en la caja, ni podemos tampoco pasar desde la primera a la segunda (¿por qué?). Todas las colocaciones alcanzables merced a un número par de «movimientos» definen problemas resolubles. El lector podría intentar una demostración de este enunciado.

Todos los juegos aquí mencionados, y otros muchos más, comparten un rasgo común. No sólo los finales de ajedrez, sino también *«el lobo y las ovejas»*, y el tatetí, o «tres en raya», tienen teorías que indican qué color (las

negras o las blancas) ganará la partida si se procede con una estrategia adecuada. Al propio tiempo, la teoría enseña cómo jugar adecuadamente. El caso de tablas podría crear casos excepcionales; para eliminarlo, podemos convenir en que el jugador que al verse confrontado con una posición ya acontecida repita por segunda vez el mismo movimiento que entonces sea el perdedor. Ahora bien, existe un teorema general que establece que todos los juegos de la clase descrita, en cuanto antecede, son desiguales, o bien fútiles. Se dice que un juego es *fútil* cuando permite que se produzcan tablas si se ha jugado adecuadamente por ambos bandos. En ciertos *juegos* son imposibles los empates. Se trata de los llamados juegos *categóricos.* Podemos excluir los empates en otros merced a reglas suplementarias, como ya se ha mencionado. Nuestra tesis afirma que todos los juegos categóricos son desiguales. El significado de esta tesis es que tan sólo uno de los colores dispone de un método (una «estrategia») que le permita ganar independientemente de lo que el bando del otro color haga. El descubrimiento de tal método puede resultar muy sencillo, como en «el lobo y las ovejas», o muy difícil, como en algunos *finales de ajedrez.* No obstante, la existencia de un color victorioso y de una estrategia conducente a la victoria son seguras. El teorema es lo bastante general como para ser aplicable a juegos como el ajedrez, una vez convertido en categórico gracias a la regla ya mencionada, y considerando como vencido al bando que caiga en caminos trillados.

Para demostrar el teorema, imaginemos un final de partida que garantice la victoria a las blancas en cuatro jugadas como máximo. Llamémoslo FP_4. Está claro que las blancas disponen de una jugada inicial de tales características que, hagan las negras lo que hicieren, la posición resultante es un FP_3. Diremos, pues, que esta jugada es «buena». Las blancas disponen ahora de otra buena jugada, que reduce la posición a un FP_2, y así, sucesivamente, hasta llegar a un FP_1. Existe ahora una jugada que proporciona la victoria a las blancas: el mate. Evidentemente, una mala defensa de las negras acelera su derrota, de modo que en vez de sufrir mate en cuatro jugadas exactamente, lo sufra en 3. En cualquier caso, las blancas disponen de una serie de «jugadas buenas» que le dan la victoria en 4 jugadas, o antes. Ahora está claro el significado de un FP_n. Todos los FP_n, siendo n un número natural (n = 1, 2, 3, ...) se denominan «victoriosos» para las blancas. Consideremos ahora la posición inicial de una partida de ajedrez, estando las 32

piezas ordenadas y listas para la batalla. Hay dos casos posibles y mutuamente excluyentes: (I) la posición es victoriosa para las blancas, y (II) la posición no es victoriosa para las blancas. En el primer caso, el juego de ajedrez es esencialmente victorioso para las blancas: es, sencillamente, un FP_n. En el segundo, la posición inicial no es un FP_n. En este caso, para cada determinado movimiento *M* de las blancas existe una tal respuesta de las negras que la posición resultante no es una FP_n. En efecto, de no existir dicha respuesta, toda posible jugada de las negras haría victoriosa la posición para las blancas, y, por consiguiente, la propia posición inicial sería de victoria para las blancas, contrariamente a nuestra hipótesis. Sabemos, por lo tanto, que *M* puede ser respondida por las negras de tal modo que la posición resultante siga sin ser un FP_n. Aplicando el mismo razonamiento a la nueva posición, vemos que es factible que las negras encuentren una respuesta a cualquier segundo movimiento *M'* de las blancas que produce un «no FP_n». Dado que las blancas solamente pueden ganar si consiguen un FP_1 —lo cual nunca ocurrirá— y dado que el juego es categórico, las negras pueden ganarlo, hagan las blancas lo que hicieren.

Desconocemos cuál de los dos casos, I o II, es el que corresponde al ajedrez real, modificado como se explicó, pero estamos seguros de que uno de ellos, y solamente uno, es el verdadero, lo cual implica que el ajedrez sea un juego desigual. Idéntico razonamiento será válido para las damas, el juego de halma, y otros muchos más. Si no son categóricos, tienen que ser fútiles. No sabemos si el ajedrez ordinario (no modificado) es o no un juego fútil. En el caso negativo sabemos que sería desigual, pero no sabemos cuál de los dos es el bando privilegiado. E incluso si lo supiéramos, no tendríamos necesariamente por qué saber el método para lograr la victoria. Y si supiéramos que el ajedrez es fútil, podríamos seguir ignorando los métodos que producen tablas.

	0	00	000	
I	1	3	2	
II	2	3	1	
III	3	1	4	

Fig. 23

Hay juegos, de diferente naturaleza, a los cuales no es aplicable la aludida teoría. El mismo tablero utilizado para el «tres en raya» sirve para el siguiente juego. El tablero **(23)** contiene 9 números, de los cuales unos son negros, y blancos los otros. El Blanco escribe en un papel 𝕀, 𝕀𝕀 o 𝕀𝕀𝕀, mientras que el Negro escribe **I, II** o **III** en otro, pero sin que ninguno de los jugadores vea lo que ha escrito su contrario. Seguidamente, uno y otro muestran sus apuntes, a fin de determinar la columna y la fila del tablero. El número que se encuentre en la fila y columna así elegida indica el número de pesetas que el Blanco recibirá de su contrario, si el número es blanco, o el que ha de pagar al Negro, si es negro. La peculiaridad de este juego estriba en que no es «cerrado». Para explicar el significado de esta observación, supongamos que el Blanco elija siempre 𝕀𝕀, y que el Negro haya advertido esta preferencia. Lo menos que el Negro puede hacer en estas circunstancias es elegir **II**, de este modo podrá ganar tres pesetas en cada ronda. Evidentemente, el Blanco, por experiencia, aprenderá este truco del Negro, y pronto descubrirá que le conviene cambiar de táctica y optar por 𝕀. Este cambio le reportará dos pesetas en cada ronda, en tanto el Negro persista en **II**. Es fácil comprender que esta adaptación mutua nunca conducirá a una estrategia fija para ambos jugadores. La situación es diferente en ajedrez. En el final de partida del *doctor Berger*, la solución dada en nuestro texto [Véase la nota **(17)**] es la mejor para ambos jugadores. Si quien juega las blancas supiera que su oponente jamás cometerá errores, comenzarían con D-D8C; de lo contrario, no podría esperar una victoria en su jugada decimotercera. Si el jugador de las negras supiera que su contrario es un jugador ideal, respondería A-AD5. Cualquier otra jugada permitiría a las blancas conseguir el mate antes de la jugada decimotercera. La partida continuaría de este modo, conformemente a la «solución principal». En una partida así, los dos métodos, el de las blancas y el de las negras, son óptimos. Es la existencia de tales «soluciones principales» la que determina que un juego sea «cerrado».

El *ajedrez* es, por consiguiente, un *juego cerrado*, y todos los juegos corrientes, como las damas, el halma, y similares, para los cuales hemos demostrado ya que son desiguales o son fútiles, son juegos cerrados, mientras que nuestro nuevo juego de 9 casillas no es ni cerrado ni injusto, sino

justo y equitativo, como lo es el juego de «los chinos». Evidentemente, el hecho de que en estos juegos no haya primer ni segundo jugador es esencial.

Supongamos un conejo encerrado en un jardín **(24),** separado de la calle por una verja. El perro que vemos en la calle está ansioso por acercarse lo más posible al conejo, mientras que éste quiere mantenerse apartado al máximo de su potencial agresor. Cada uno de ellos busca el punto más ventajoso, cuyo valor estima en función de la distancia que les asegure, si bien mientras que para el conejo tal valor aumenta con la distancia, para el perro es al contrario. Ninguno de ellos es matemático, y, por consiguiente, proceden por tanteos.

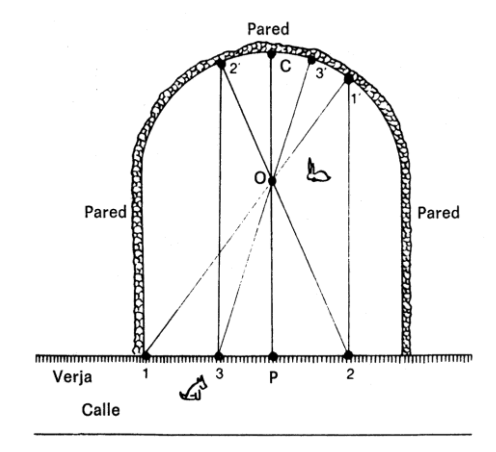


Fig. 24

Cuando el perro asoma por 1, el conejo se retira hasta 1', ya que a causa de la forma semicircular que tiene la pared del fondo del jardín (*O* es el centro de la circunferencia), el punto más distante de 1 es 1'. Lo mejor que el perro hará ahora es correr hacia el punto 2, que es el más cercano a *Y* de los puntos a que puede acceder el perro. Apercibido de que el perro se encuentra en 2, el conejo se apresura a dirigirse a 2'; la respuesta evidente del perro es situarse en 3, etc. Se comprende fácilmente que las sucesivas posiciones 1, 2, 3, ... del perro se acercan cada vez más al punto *P*, mientras que las posiciones del conejo, 1', 2', 3', ... se aproximan al punto *C*. Al cabo de un tiempo finito (¿por qué?) el perro ocupará el punto *P*, el conejo habrá

llegado a *C,* y ambos animales se sentirán satisfechos: el perro, porque cualquier movimiento suyo aumentaría su distancia al conejo, que se encuentra en *C*; el conejo, porque cualquier cambio de posición le llevaría más cerca del punto *P* ocupado por el perro. Si llamamos *d* a la distancia *PC* diremos que el perro, al jugar su partida, puede asegurarse la distancia *d,* y que no le es posible asegurarse ninguna distancia *d'* menor que *d;* el conejo es capaz igualmente de jugar de manera que asegure para sí la distancia *d,* pero no ninguna distancia *d'* mayor que *d.* El hecho de que ambos animales lleguen a quedar simultáneamente satisfechos es una prueba del carácter cerrado del juego. La posición *P, C* es la solución de éste.

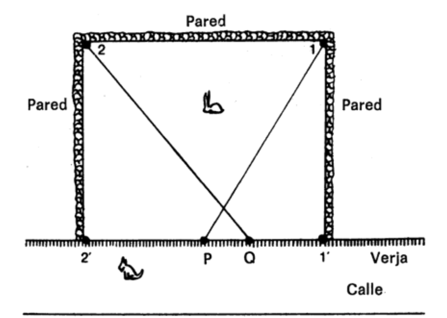


Fig. 25

Las cosas son muy diferentes en un jardín rectangular **(25)**. Tratando de lograr para sí lo más posible, el perro se sitúa en el punto medio *P,* de la verja. Es obvio que tal elección es la mejor, pues asegura que el conejo no pueda alejarse más de la distancia Pl. Cualquier otra elección distinta de la *P* (la *Q,* p. e.) conllevaría la posibilidad de que el conejo se escapase a mayor distancia (hasta 2, p. e.). La respuesta del conejo es huir hasta 1: este es el punto óptimo para él. Tal acción será contestada corriendo el perro hasta 1', que es el punto más cercano a 1. Como es natural, el siguiente movimiento del conejo lo lleva hasta 2, siendo, obviamente, seguido por una carrera del perro, desde 1' hasta 2'; el conejo escapa entonces hasta 1, y esta *persecución* continúa indefinidamente. Hagan los animales lo que hagan, no existe una solución estable: el juego es abierto.

Imaginemos ahora dos países beligerantes, a los que llamaremos respectivamente «*N*(orte)» y «*S*(ur)». *N* produce tanques de dos clases, *A* y *B;*

igualmente, *S* los tiene también de dos tipos, *C* y *D.* Ahora bien, la experiencia de muchas batallas ha demostrado que *A* vence a *C* en el 60 por ciento de los encuentros; *C* le gana a *B* en el 80 por ciento de los combates, que *B* vence a *D* en el 70 por ciento, y, finalmente, que *D* gana en el 60 por ciento de las batallas cuando se enfrenta con *A*. El problema de *N* es decidir qué tipo de tanque debe ser producido y cuál rechazado; análogo problema desazona a *S*. Es fácil constatar que no es posible ninguna solución de esta clase: si *N* opta por *A*, entonces *S* se decidirá por *D;* al comprobar *N* que su único oponente es *D* interrumpe la producción de *A* y comienza a producir exclusivamente *B.* Tal cambio induce a *S* a producir solamente *C*, lo que a su vez obliga a N a volver a *A*. Probablemente, este razonamiento haga pensar al lector en el esquema (25), donde ni el perro ni el conejo cesan de correr de un lado para otro.

Por consiguiente, el caso que nos ocupa es un juego abierto, y ahora el lector puede emplear el teorema que se refiere a la posibilidad de cerrar el juego (por combinación de estrategias). Así pues, cada parte logrará lo más posible produciendo ambos tipos de tanques en proporciones adecuadas: *N* debe producir los tanques *A* y *B* en la proporción 5:2, y *S* los *C* y *D* en la proporción 3:4. El cálculo muestra que si *N* se ajusta a esta regla, el número de sus victorias será del 48 por ciento como mínimo, haga *S* lo que haga. Por otra parte, si *S* se atuviera a nuestro consejo estaría seguro de ganar al menos el 52 por ciento de las batallas, hiciera *N* lo que hiciera. Por lo tanto, las estrategias recomendadas por nosotros son las mutuamente óptimas, y al combinar los tanques de la forma prescrita, la guerra se convierte en un juego cerrado.

Según una leyenda, el brahmán que inventó el ajedrez pidió como recompensa al rey de Persia tanto trigo como hiciera falta para cubrir todo el tablero, comenzando por colocar un grano en la primera casilla, dos en la segunda, y así, sucesivamente, duplicando siempre el número de granos **(26)**. Resultó que no sólo los graneros del Sha, sino todos los de la Tierra reunidos, serían incapaces de suministrar tanto trigo. El brahmán había solicitado, con toda modestia, el siguiente número de granos:

$$1+2+2^2+...+2^{63} = 2^{64}-1$$

Este número tiene 20 cifras, y admite divisores. (¿Cuáles?)

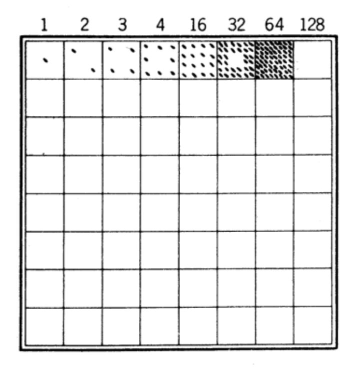


Fig. 26

Si colocamos dos tableros, uno junto a otro, continuando el proceso desde el primero al segundo tablero, y finalmente retiramos un grano del último cuadro del segundo tablero, quedarán en esa casilla $p = 2^{127}-1$, o sea,

170.141.183.460.469.231.731.687.303.715.884.105.727

granos. Este número no tiene divisores propios: se trata de un *número primo*, y tiene 39 cifras. No hay dificultad en demostrar la existencia de un número primo de 79 cifras todavía mayor sin tener que darlo explícitamente. Ha sido establecido que el número $180\ p^2+l$ es primo. Helo aquí:

5.210.644.015.679.228.794.060.694.325.391.135.853.335.898.483.908
.056.458.352.201.854.618.372.555.735.221

El número $2^{2.281}-1$, es primo, según halló la computadora electrónica SWAC el 7 de octubre de 1952, y tiene 687 cifras denarias. Las 1.332 cifras del número primo $2^{4.423}-1$ pueden verse en el número de abril de 1962 de *Recreational Math. Magazine.* En el Vol. 18 (1964), p. 13, de *Mathematics of Computation* han sido publicadas las 3.376 cifras del número primo $2^{11.213}-1$.*

* El *último* de los números primos *descubiertos* ha sido $2^{44.497}-1$, que consta de 13.395 cifras decimales. Fue hallado en 1979, con ayuda de un supercomputador, el CRAY-1. *(N. del T.)*

Los mencionados logros difícilmente se hubieran alcanzado sin la ayuda de los modernos equipos de cálculo automático, cuyas capacidades están muy lejos de haber sido totalmente exploradas.

Sobre un tablero de ajedrez podemos realizar el siguiente experimento: embadurnamos de pegamento el tablero, y lo rociamos con granos. Repitamos la operación hasta que aparezcan 64 granos en el tablero. Evidentemente, no todos los cuadrados habrán de contener el mismo número de granos: algunos estarán vacíos; en otros sólo habrá un grano; en otros, dos, etc. El cálculo de probabilidades nos dice que es de esperar que 24 cuadros queden vacíos; que 24 contengan un grano nada más; 12, dos granos; que 3 cuadros contengan tres granos, y 1 cuadro, cuatro granos. (Los cálculos exactos dan números decimales, con lo que la suma de los productos da 64 granos.)



Fig. 27

El experimento se revelará mucho más notable cuando sobre el mapa de Polonia **(27)** dibujemos un cuadrado dividido en 64 campos y en el territorio recuadrado señalemos las 64 ciudades más grandes. Como vemos, en el mapa hay menor número de cuadros vacíos de lo que cabría esperar según el cálculo precedente, y mayor número de cuadrados con solo una ciudad, lo cual se debe a la tendencia de las ciudades de ubicarse alejadas unas de otras. Como es obvio, las cabezas de partido no se encontrarán demasiado

cerca unas de otras. Pero al seleccionar únicamente las 16 mayores ciudades polacas, el resultado concuerda bien con la teoría de probabilidad.

La misma idea es aplicable a la disposición de los cromosomas de ciertas células humanas *(leucocitos).* Las técnicas de microfotografía los han hecho visibles. Hay 46 cromosomas en cada célula. Aquí tenemos que reemplazar el cromosoma por un punto, el llamado «centrómero», donde el cromosoma se estrecha al máximo. Se transfieren los 46 centrómeros, y un polígono que sirva para enmarcarlos, a una retícula cuadriculada **(28),** cada una de cuyas casillas tiene una superficie igual a 1/46 de la del polígono.

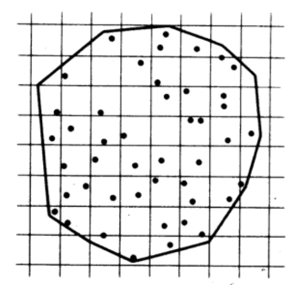


Fig. 28

Cuando nos referíamos a las 64 ciudades **(27)** recurrimos al cálculo de probabilidades para que nos dijera cuántos de los cuadrados podríamos esperar que estuvieran vacíos; cuántos, ocupados por una ciudad, y así sucesivamente. Nos enfrentamos ahora al mismo problema, pero reemplazando 64 por 46. La tabla I se interpreta como sigue: hemos de esperar que un promedio de 17,1 casillas contengan un *centrómero;* que 8,55 casillas contengan dos; etc., y, finalmente, que 16,73 casillas no contengan ninguno.

Tabla I

Cuadrados	⚀	⚁	⚂	⚃	*Vacíos*
Esperados	17,1	8,55	2,79	0,83	16,73
Observados	27,0	7,1	1,06	0,02	10,88

Los datos de la segunda línea fueron proporcionados por un estudio empírico sobre 50 leucocitos. El número promedio de cuadrados ocupados por un único *centrómero* resultó ser de 27. La diferencia 27–17,1 es lo suficien-

temente grande como para mostrar que los centrómeros no se mueven a ciegas, sino que tienden a evitar la proximidad de unos a otros, conducta que hace aumentar a 27 el número medio de cuadrados ocupados por un solo habitante, y obliga a descender casi a 0 el número de cuadros con cuatro o más centrómeros.

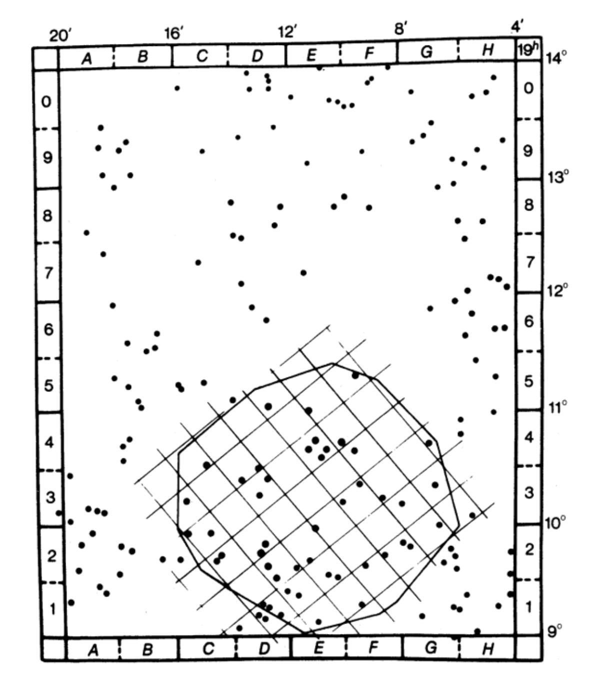


Fig. 29

Hasta el momento no hemos descrito ningún ejemplo de puntos repartidos puramente al azar. El microscopio nos ha fallado; recurramos, pues, al telescopio. De un campo de estrellas de la constelación *Águila* hemos seleccionado nada más el conjunto de las de magnitud 10-11. Desplazamos sobre la carta estelar un polígono convexo, deteniéndonos cuando éste encerraba 46 estrellas **(29).** El ejemplo que buscábamos viene dado en la tabla II, cuyos valores son casi idénticos a los esperados según la tabla I. Tal identidad demuestra el carácter aleatorio de la distribución de estrellas en *Águila,* contrariamente al comportamiento de los cromosomas.

Tabla II

Cuadrados	⚀	⚁	⚂	⚃	*Vacíos*
Observados	17	8	3	1	17

Es fácil escribir números muy grandes. Tales gigantes se definen muy sencillamente, si convenimos en escribir $\triangle a$ en lugar de a^a, $\boxed{a}$ en lugar de «a en a triángulos», y ⓐ en lugar de «a en a cuadrados». Entonces el número «Mega» = ② es

MEGA = ② = $\boxed{\boxed{4}}$ = $\triangle\triangle 2$ = $\triangle 2^2$ = $\boxed{4^4}$ = $\boxed{256}$ = 256 en 256 triángulos = ···

Fig. 30

ya demasiado grande para tener algún significado físico **(30)**, siendo el último símbolo «256 en 256 triángulos»; ahora se muestra claro el motivo de haber abandonado la notación ordinaria. El lector podría tratar de explicar el «Megiston», dado por ⑩).

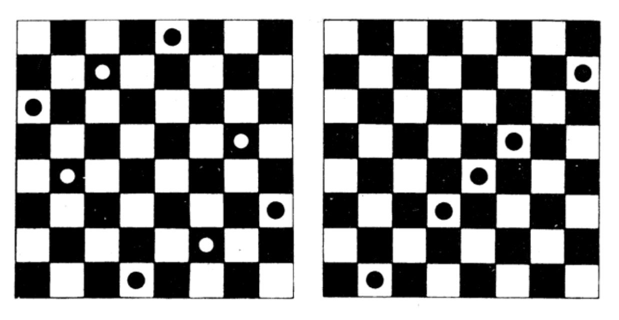


Fig. 31 **Fig. 32**

El *tablero de ajedrez* ha producido multitud de juegos y rompecabezas. Por ejemplo, podemos situar en él ocho damas **(31)** de tal manera que ninguna amenace a ninguna de las demás. Hay 92 modos diferentes de disponer las reinas de esta forma, la totalidad de los cuales son deducibles de 12 posiciones fundamentales mediante giros y adecuadas simetrías del tablero. Es

posible colocar en él cinco reinas **(32)** de modo que cada cuadro esté amenazado al menos por una reina. Este problema admite 4.680 soluciones que se deducen de 638 soluciones diferentes. Cabe también resolver el problema de modo que las reinas no se amenacen unas a otras. (¿Cómo?)

Supongamos que al rey le estén «prohibidos» ciertos cuadros del tablero. Se los elige de modo que, si parte de cualquier punto situado en el borde izquierdo, le impidan alcanzar el borde derecho del tablero. Una torre puede entonces trasladarse desde el borde superior al inferior sin salir de los escaques prohibidos. Esta propiedad la comparten los tableros rectangulares (con *m* x *n* cuadros). Es obvia, pero el autor no conoce ninguna demostración sencilla...

Un caballo puede recorrer en 64 movimientos el tablero completo, de tal modo **(33)** que el polígono formado tenga su centro en el centro del tablero, y que los números consecutivos de los cuadrados formen un *cuadrado «semi-mágico»*, es decir, que la suma de cada fila y cada columna sea siempre la misma (= 260; no puede haber otra suma posible. ¿Por qué?).

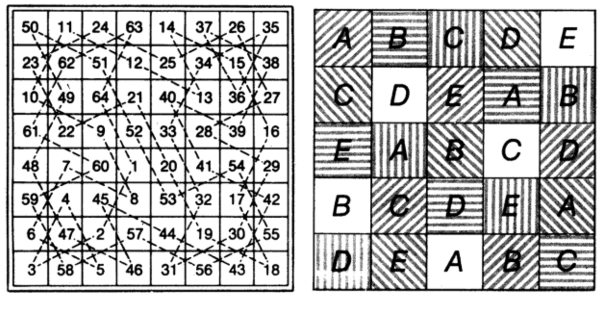


Fig. 33 **Fig. 34**

El gran matemático *Euler* se interesó por estos «paseos a caballo» y por otros problemas similares, como el de «los 36 oficiales». Este último consiste en lo siguiente: ¿Cómo formar en cuadro a las delegaciones de seis regimientos, cada una de las cuales consta de un coronel, un teniente coronel, un comandante, un capitán, un teniente y un alférez, de modo que en ninguna fila y en ninguna columna se repitan ni oficiales del mismo regimiento, ni de la misma graduación? Este problema es irresoluble; en cambio, se pueden formar fácilmente a 25 oficiales en el orden deseado **(34)**;

los distintos sombreados denotan los colores de los regimientos, y las letras, las graduaciones.

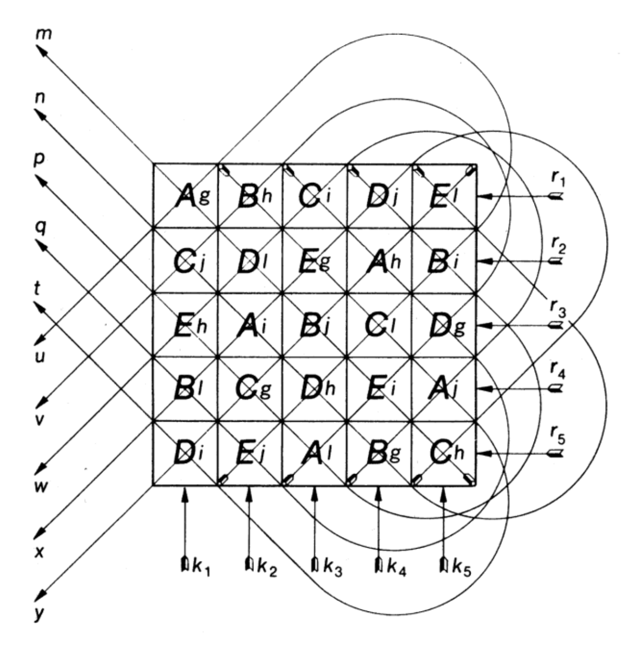


Fig. 35

Estos *cuadrados*, llamados *«greco-latinos»*, tienen aplicaciones prácticas. Para estudiar la influencia de distintos tratamientos sobre diversas variedades de una planta dividiremos el campo de cultivo en 25 parcelas **(35)** e indicaremos mediante letras mayúsculas *A, B, C, D, E* cinco variedades diferentes. Las letras pequeñas *g, h, i, j, l* representan cinco fertilizantes distintos. La disposición exhibe en 25 parcelas las 25 posibles combinaciones de 5 variedades con 5 fertilizantes. Si las hileras reciben diferentes grados de humectación, nuestra disposición muestra las combinaciones de todas las variedades con cada posible grado de tal humectación. Por ejemplo, el mínimo grado de humedad r_1 aparece combinado con *A, B, C, D* y *E;* y otro

tanto sucede con r_2, r_3, r_4 y r_5. Además, la humectación r_1 aparece combinada con todos los fertilizantes, y lo mismo vale para los restantes grados. Las columnas corresponden a diferentes sistemas de cultivo; es evidente que la primera columna k. aparece combinada con todas las variedades, con todos los fertilizantes, y con todas las humectaciones; lo mismo vale para cualquier otra columna. Tenemos dos sistemas de diagonales: *m, n, p, q, t* y *u, v, w, x, y*. El primero corresponde a cinco diferentes momentos de sementera; el segundo, a cinco de cosecha. Fijémonos en la diagonal *m:* atraviesa todas las filas, todas las columnas, y sus parcelas llevan todas las letras mayúsculas, todas las del grupo *g–l,* y todas las letras del sistema u–y. Así, pues, si calculamos el rendimiento medio *m* de las cinco parcelas *m,* podremos esperar haber eliminado todas las influencias debidas a tratamiento y variedad, exceptuada la influencia de la fecha de siembra. Si calculamos el rendimiento medio *A* de las cinco parcelas designadas por esta letra, habremos eliminado todas las influencias, exceptuada la influencia de la variedad. Estas proposiciones, que son consecuencia inmediata de la inspección del cuadrado greco-latino, conducen al siguiente método. Sea *M* el rendimiento medio por parcela, es decir, la cosecha total dividida entre 25. Al igual que antes, designemos por cada letra el rendimiento medio de las parcelas correspondientes a esa letra, o sea, la suma de las cinco cosechas de las correspondientes parcelas, dividida entre 5. Es posible ahora calcular la suma siguiente:

$$(M-A)^2 + (M-B)^2+(M-C)^2+(M-D)^2+(M-E)^2$$

y sumas análogas para otros grupos de letras:

$$(M-g)^2 + (M-h)^2 + (M-i)^2 + (M-j)^2 + (.M-l)^2,$$

$$(M-r_1)^2 + (M-r_2)^2 + (M-r_3)^2 + (M-r_4)^2 + (M-r_5)^2,$$

y así sucesivamente.

El paso siguiente consiste en comparar estas sumas. Si, por ejemplo, la primera fuese mayor que la segunda, tendríamos derecho a inferir que la influencia de la variedad sobre el rendimiento es mayor que la del fertilizante. El análisis exacto de las varianzas (tal es el nombre del método) es, sin embargo, mucho más refinado, pues considera también la cuestión de si

las diferencias de las sumas son lo suficientemente grandes como para no atribuirlas a desviaciones aleatorias.

Para ganar en las carreras no basta sólo con conocer los caballos, sino que también tenemos que conocer a los apostadores. Si apostamos sobre un caballo muy conocido, en el mejor de los casos ganaremos poco, o nada en absoluto, porque muchos de los aficionados a las carreras habrán tenido la misma idea. En consecuencia, uno debería elegir un buen caballo, cuyos méritos solamente fueran conocidos de unos pocos apostadores. El juego siguiente, que es posible jugar sin caballos ni cachivaches de ninguna especie, pertenece a la misma categoría. Se les pide a las personas de una reunión que depositen 100 pts. como entrada en el juego, y que anoten cada una, por separado, en un pedazo de papel, cuánta estiman que es la altura de la sala. Seguidamente se recogen los papeles, y se calcula la media aritmética de tales estimaciones. La persona cuya conjetura se haya acercado más a este valor medio gana todo el dinero de las apuestas. Lo fundamental es que no es preciso medir para nada la habitación, por lo que el dueño del piso, que sabrá la altura exacta, no se encuentra más favorecido que los demás. En este caso, el conocimiento de las personas no es de menor importancia que en las apuestas de caballos.

1	~~2~~	3	4	5	6	7	8	9	~~10~~
~~11~~	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	~~50~~
51	52	53	54	55	56	~~57~~	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90

Fig. 36

Se divide un boleto **(36)** en 90 campos rectangulares, cada uno de los cuales lleva rotulado un número. Al leerlo como si fuera un texto encontramos todos los números, del 1 al 90, en orden natural. Hace años, en algunos países de Europa se vendían a precio fijo este tipo de billetes (ahora se ha repuesto en España, con el nombre de *Lotería Primitiva. N. del T.).* El comprador tenía que tachar cinco de los 90 números (por ejemplo, 2, 10, 11, 50, 57), dejarle una copia al vendedor, y leer en el periódico del domingo cuáles de entre los 90 números habían sido extraídos al azar por la administración

de lotería. Dicha administración tenía que transferir el 40% del dinero recibido a obras benéficas; el 60% restante se dividía entonces en cuatro partes iguales: un parte, se repartía equitativamente entre los boletos cuyos cinco números tachados coincidieran con los cinco números extraídos; otra entre los que tuvieran cuatro aciertos; otra, entre los que tuvieran tres aciertos, y la última parte entre los boletos con dos aciertos. Llamemos «primer premio» (I) al dinero pagado a cada jugador con cinco aciertos en su boleto; «segundo premio» (II), a lo pagado a cada jugador con cuatro aciertos; «tercero» (III), para tres, y «cuarto» (IV), para dos aciertos. El lector puede demostrar que el premio I supera al premio II, que II es mayor que el III, y que el III le da a su titular más que el IV. El autor de este libro fue preguntado por varios jugadores por qué los números de los boletos que ganaron el segundo premio fueron, durante diez domingos consecutivos, 21, 93, 1, 1, 4, 11, 5, 12, 1, 1. Los periódicos publicaban cada domingo el número total de billetes que aquella semana tomaban parte en el juego, y algunos jugadores podían determinar, por cálculo de probabilidades, el número esperado de billetes con segundo premio de esa semana. A causa de las fluctuaciones en el número total de billetes, el número esperado en cuestión debía oscilar entre 7,7 y 9. ¿Cómo reconciliar estos límites con las diez cifras dadas más arriba?

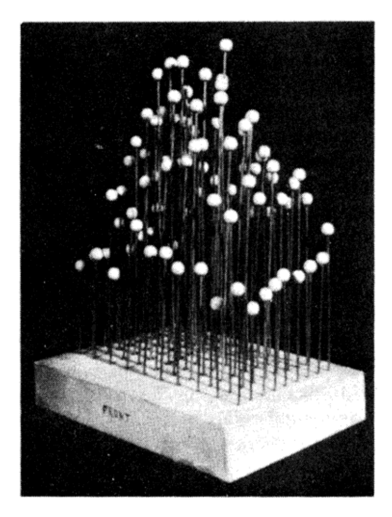


Fig. 37

Se ha logrado obtener una respuesta gracias a un modelo **(37)** que visualiza los resultados de una encuesta estadística basada en 4.000 billetes viejos, suministrados por la administración de loterías. Imaginemos que estos billetes formen un grueso mazo, y perforémoslos con 90 agujas verticales; la longitud que cada aguja sobresale encima del mazo es proporcional al número de marcas situadas en los 4.000 campos atravesados por tal aguja. El lector puede constatar una marcada predilección por los campos centrales. De no ser por estos sesgos, cada aguja representaría a unas 222 marcas, aproximadamente. En realidad, la aguja número 1 representa 119 marcas; el número 90 ha sido tachado 127 veces; el 80, 98; mientras que el número 46, que figura en 379 billetes, es el campeón.

Este sorprendente fenómeno es de naturaleza psicológica: un prejuicio irracional, pero compartido por la mayoría de los jugadores, les dice que la suerte prefiere los campos centrales. Su razón inconsciente puede que sea la alegoría de la flecha de Fortuna, dirigida al centro de la diana.

Las consecuencias reales de esta irracional conducta son las siguientes: si los números extraídos por la administración de loterías se encuentran entre los favorecidos por la mayoría de los jugadores, los ganadores recibirán una parca recompensa en comparación con los premios que aguardan a los apostantes por números repudiados por tal mayoría. Las probabilidades de ganar son las mismas en ambos casos, pero la ganancia individual esperada es significativamente mayor para los jugadores pertenecientes a la minoría. Por lo tanto, el modelo **(37)** será útil a los jugadores desprovistos de prejuicios. Tales jugadores no tienen más que elegir números indicados por agujas cortas.

Se ha demostrado experimentalmente que los jugadores que obedecen durante varios meses a los consejos recién dados pueden ganar lo suficiente como para cubrir el costo de los boletos, y así esperar pacientemente a que caiga un premio gordo. Lo que ocurre es que resulta excepcional encontrar jugadores así.

Sería posible mejorar sustancialmente la teoría aquí esbozada, utilizando un computador para ir calculando, a partir de los billetes viejos, las frecuencias de las parejas, las ternas, las cuádruplas, y las quíntuplas.

El gran error del jugador ordinario está en el deseo de adivinar los números que van a salir en el próximo sorteo, en lugar de recoger billetes viejos para ver cómo evitar en el suyo números frecuentemente señalados por otras personas.

Las observaciones anteriores no son válidas para las loterías que prometen premios fijos.

A fin de mostrar los resultados de un sorteo real, que tuvo lugar hace muchos años, y en el que participaron 1.371.127 billetes, y de comparar los resultados esperados y los reales, confrontaremos los números de billetes ganadores en el sorteo real, con los números esperados de tales billetes según el cálculo de probabilidades:

Premios	*I*	*II*	*III*	*IV*
Número real de billetes premiados	0	117	4.773	64.451
Números esperados de billetes premiados	0,3	13,26	1.114	30.814

El ejemplo anterior muestra que los cinco números ciegamente extraídos formaban, por azar, una pauta popular entre muchos jugadores. Los cuales, sin embargo, quedaron descontentos, especialmente los ganadores del segundo premio, cuyos premios individuales fueron nueve veces menores que la suma esperada.

2. Rectángulos, números y melodías

Nos valdremos de la palabra *Normal* para aludir a una hoja rectangular de papel, que plegada en dos mitades rectangulares dé una hoja semejante (en sentido geométrico) a la primitiva (38). Si denotamos sus lados por a y b, tendremos la proporción $a : b = b : a/2$. Tomemos dos hojas normales idénticas, y adosemos la base b de la segunda al lado mayor a de la primera (39). Obtenemos así un rectángulo grande, cuyos lados miden $a + b$ y b (la parte sombreada del dibujo), y un rectángulo pequeño, de lados b, a-b (la región en blanco). La proporción $a : b = b : a/2$ da $a^2 = 2b^2$, por lo que es fácil comprobar que $(a+b) : b = b : (a–b)$. Así, pues, el rectángulo sombreado es semejante al rectángulo en blanco.

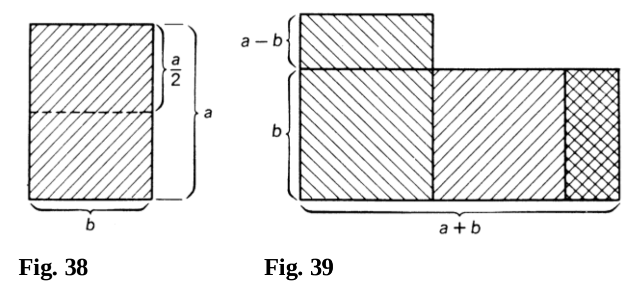


Fig. 38 **Fig. 39**

A la figura definida por el rectángulo la llamaremos *rectángulo hipernormal;* hemos demostrado que al recortar dos cuadrados de una hoja hipernormal, el sobrante es todavía hipernormal. Supongamos ahora que tenemos una hoja normal, de lados iguales a a cm ya b cm, respectivamente, siendo a y b números enteros. A partir de tal hoja podemos formar una hipernormal, como ya hemos visto; sus lados serán números enteros, al ser medidos en cm. Pongamos que p cm de lado mayor, y q cm de lado menor. Recortando dos cuadrados obtendremos una nueva hoja hipernormal: sus lados serán de q y $p–2q$ cm, respectivamente. Es evidente que estos tres números son enteros, y que el nuevo lado mayor es menor que la mitad del antiguo

lado mayor. Prosiguiendo de igual manera vamos obteniendo hojas hipernormales cada vez más pequeñas. Al cabo de *p* pasos todavía deberíamos seguir teniendo una hoja cuyos lados, expresados en cm, siguieran siendo enteros, lo cual es absurdo, porque en cada paso se pierde por lo menos 1 cm, y el lado mayor tendría que acabar por desaparecer. Este hecho demuestra que no existen hojas normales de lados enteros. Poco importa qué unidades de longitud hayamos elegido: el razonamiento vale por igual para mieras como para metros. La razón de los lados de una hoja normal es √2, que representa a un número que multiplicado por sí mismo da 2. Lo que hemos demostrado aquí es que √2 *es irracional,* es decir, no es la razón de dos enteros *a/b.*

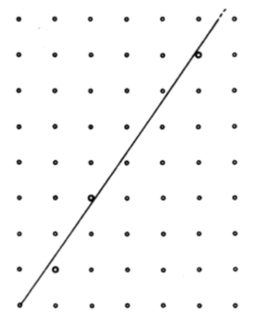


Fig. 40

Demostraremos nuestro resultado en el *«retículo de los enteros»* **(40),** que es, sencillamente una formación de puntos en filas y columnas, espaciados por igual en filas o columnas, como si fueran varas de lúpulo, o los vértices de los cuadros de un tablero de ajedrez que se extendiese por todo el plano. Al colocar un vértice de una hoja normal sobre el vértice inferior izquierdo del retículo, y trazar la diagonal de la hoja, se obtiene la línea recta oblicua. Cuando miramos según esta visual no vemos ni una sola vara. (¿Por qué?)

El número √2 se expresa también de este modo:

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cdots}}}$$

Si a esta fracción la llamamos x, tendremos como primer denominador el número $1 + x$, lo que implica que

$$x = 1 + \frac{1}{1+x} \ , \qquad x - 1 = \frac{1}{1+x} \ , \qquad x^2 - 1 = 1 \ ,$$

$$x^2 = 2 \ , \qquad x = \sqrt{2}$$

Resulta de aquí que como valores aproximados de $\sqrt{2}$ se cuenten 1, 3/2, 7/5, 17/12... La *pendiente* de la línea oblicua es $\sqrt{2}$; las fracciones 1, 3/2... definen ciertos puntos del retículo. Por ejemplo, 3/2 determina el punto que se encuentra yendo 3 intervalos hacia arriba y 2 intervalos hacia la derecha del vértice. Comprobamos que estos puntos se aproximan más y más a la línea oblicua.

Dado que ya hemos demostrado que $\sqrt{2}$ no es la razón, o cociente, *a/b*, de dos enteros, sabemos que no podremos hallar enteros *a* y *b* tales que tengamos $a^2 = 2b^2$. Dicho de otro modo, dados dos destacamentos iguales de soldados, que formen sendos cuadrados, será imposible hacerlos formar a todos juntos en un único cuadrado. Sin embargo, sí es factible satisfacer este capricho si no nos preocupa que sobre o falte un soldado. Las fracciones ya encontradas dan las siguientes *formaciones cuadráticas:*

$$2^2+2^2 = 3^2-1 \ , \ 5^2+5^2 = 7^2+1 \ , \ 12^2+12^2 = 17^2-1...$$

Para obtener todas las fracciones necesarias comencemos por 1/1: la suma 1+1 = 2 da el denominador siguiente, la suma 1+2 = 3 da el numerador, 3+2 = 5 el tercer denominador, 2+5 = 7 el tercer denominador, y así sucesivamente.

$$\frac{1}{1} \ \frac{3}{2} \ \frac{7}{5} \ \frac{17}{12}$$

La regla aritmética es como sigue: si *p/q* es una fracción, y *P/Q* es la siguiente, tenemos

$$Q = p+q \ , \ P = q+Q = p+2q$$

Supongamos que la fracción p/q dé una formación cuadricular con un soldado de más o de menos:

$$p^2 - 2q^2 = \pm 1 ;$$

Demostraremos fácilmente que también P/Q es una de tales formaciones. En efecto, tenemos

$$\begin{aligned} P^2 - 2Q^2 &= (p+2q)^2 - 2(p+q)^2 \\ &= p^2 + 4pq + 4q^2 - 2p^2 - 4pq - 2q^2 \\ &= 2q^2 - p^2 \\ &= \pm 1. \end{aligned}$$

Ahora bien, 1/1 es, evidentemente, una solución:

$$1^2 - 2 \times 1^2 = -1;$$

se deduce entonces que la próxima fracción es también una solución, y así sucesivamente. La totalidad de las fracciones son soluciones, y dan soluciones cuadriculares. Hemos enunciado anteriormente este aserto, pero aquí tenemos una demostración.

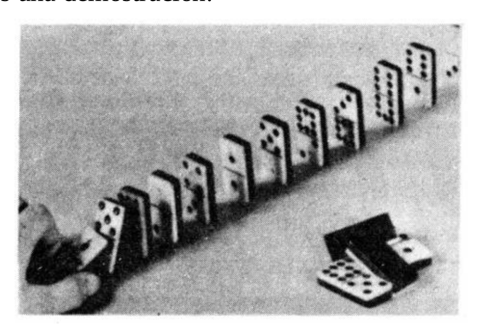


Fig. 41

El método de dicha demostración nos recuerda el juego de tumbar dominós: **(41)** los disponemos de pie, en hilera, y al tumbar la primera pieza **(42)** caen derribados los demás. Para prever el resultado nos basta saber que la primera pieza va a ser derribada, y que todas están tan juntas que la caída de una comporta la de la inmediatamente siguiente. Los razonamientos de este carácter se llaman razonamientos por *inducción matemática*.

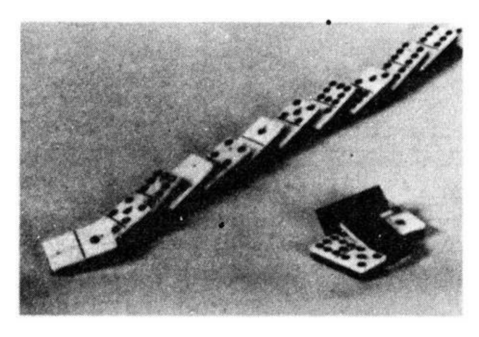


Fig. 42

Los números racionales e irracionales están relacionados con el problema de la *escala musical* **(43).** Llamamos irracionales a aquellos números que, al igual que √2, no son expresables mediante una razón *a/b* de dos enteros. En la escala de Do Mayor **(44)** los intervalos do-re, re-mi, fa-sol, sol-la, la-si tienen que ser iguales *(«tonos* enteros»), mientras que los intervalos mi-fa y si-do son únicamente la mitad de los anteriores («semitonos»).

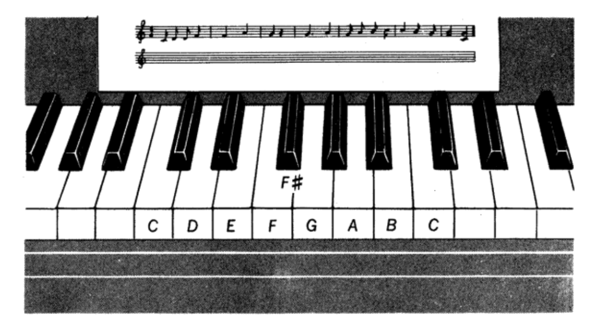


Fig. 43



Fig. 44

Hace ya tiempo que fueron examinadas en el *monocordio* las *concordancias* más sencillas, y se ha descubierto que cuanto menores sean los números que expresan las frecuencias relativas de las vibraciones, tanto mejor

es la concordancia. El tono Do alto tiene el doble de vibraciones por segundo que el tono do bajo, y por ello la octava está expresada por la razón 2:1. La razón 3:2 da la quinta (Do-Sol), 4:3 la cuarta (Do-Fa), 5:3 la tercera mayor (Do-Mi), 6:5 la tercera menor (Re-Fa). La distancia do-Do es igual a 12 semitonos = 4 terceras menores, por lo que deberíamos tener

$$(6/5)^4 = 2\ ;$$

Ahora bien, la fracción de la izquierda vale 2,074 y, por consiguiente, es demasiado grande. Este hecho no puede remediarse, puesto que es imposible lograr una afinación tal que todas las concordancias resultantes tengan razones expresables mediante cocientes de números enteros. Entre Fa y Sol se encuentra Fa sostenido (la tecla negra, en el centro exacto de la octava); la razón entre Do y Fa sostenido es la misma que entre Fa sostenido y el Do agudo, y equivale a una cuarta aumentada. Si llamamos x a la razón de Fa sostenido: no obtenemos $x^2 = 2$, y por consiguiente, $x = \sqrt{2}$, que es un número irracional. El piano tiene una escala temperada: todos los intervalos de semitonos son iguales a $\sqrt[12]{2}$, pero las concordancias no son exactas. El violinista, obedeciendo a su sentido musical, se separa del piano; para él, la cuarta aumentada es 7:5 (apartándose de la cuarta temperada, exactamente igual que el punto 7/5 del retículo lo hace de la línea recta oblicua).

Dividamos la escala musical en 6, 7, 8, 9... etc. intervalos (es decir, adhiriéndonos al principio de la escala temperada, como se explicó anteriormente). Para lograr una escala que contenga las concordancias naturales con suficiente exactitud hemos de llegar a nada menos que una escala temperada de 19 intervalos. Podemos verlo en el diagrama **(45)**. Las posiciones de las concordancias naturales (la octava, la quinta, la cuarta, etc.) aparecen en **(45)** como líneas verticales. Un piano que tuviera por escala 19 teclas, en lugar de 12, seguiría siendo realizable, y tendría no sólo la ventaja de mejores armonías, sino también diferentes tonos para Do sostenido y Re bemol, que son siempre distinguidas en tanto que notas, pero no en el teclado ordinario. Estos matices cromáticos corresponden a intenciones del compositor, y, en realidad, los violinistas los respetan.

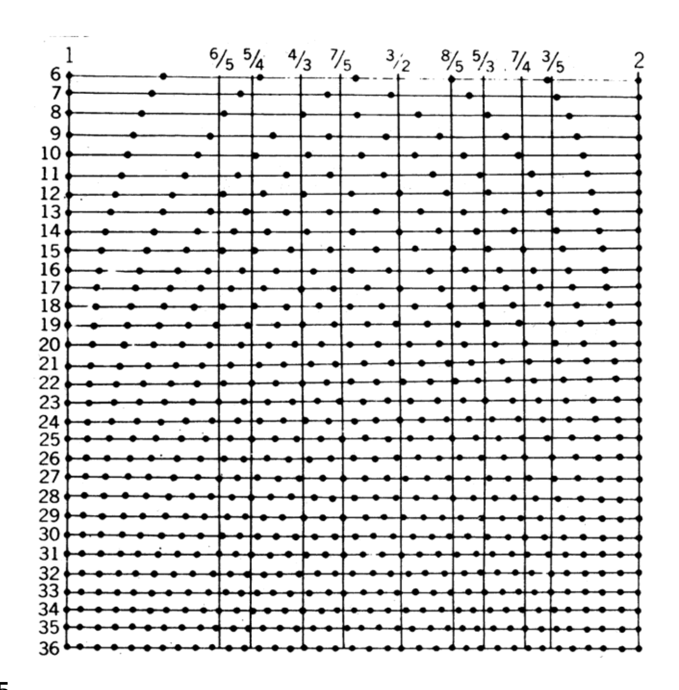


Fig. 45

La *fracción continua infinita* que da √2 no es la más sencilla de las posibles. Evidentemente, la más sencilla es

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\dots}}}}$$

El número x dado por esta fracción es un número irracional. Dado que bajo el primer numerador 1 vemos como denominador la propia fracción continua, tendremos

$$x = 1 + \frac{1}{x}\ ,\quad x^2 - x = 1\ ,\quad x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$$

Utilizaremos la denominación de *«rectángulo áureo»* para una hoja rectangular que **(46)** está compuesta por un cuadrado más un rectángulo semejante a la hoja entera. Si a y *b* son sus lados, obtenemos

$$a : b = b : a - b \ , \ \ a^2 - ab = b^2 \ , \ \ (a/b)^2 - (a/b) = 1.$$

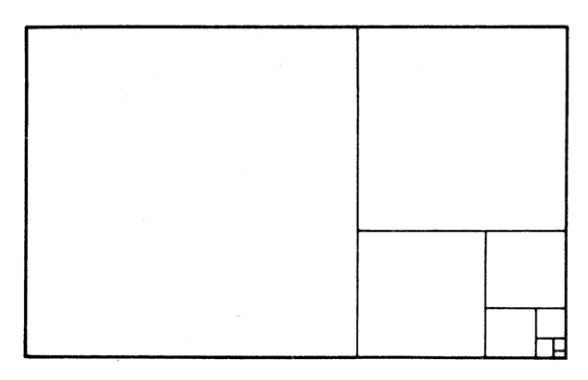


Fig. 46

La fracción *a/b* verifica la misma ecuación que *x*; así, pues, es igual a (√5+l)/2. Siendo este número un irracional, no hay enteros *a,b* que correspondan a los lados de un *rectángulo áureo.* Podemos, sin embargo, proceder como con √2. Terminando la fracción continua en diversas etapas obtenemos, sucesivamente

$$1/1 \ , \ \ 2/1 \ , \ \ 3/2 \ , \ \ 5/3 \ , \ \ 8/5 \ , \ \ 13/8 \ ,...$$

Las fracciones van aproximándose más y más al verdadero valor de la *razón áurea,* que es 1,618... Los numeradores 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,... son los llamados *números de Fibonacci.* Estos números se generan por adición sucesiva, a partir de 1+1:

$$1+1 = 2 \ , \ \ 1+2 = 3 \ , \ \ 2+3 = 5 \ , \ \ 3+5 = 8 \ , \ \ 5+8=13 \ ,...$$

El enésimo número de la *sucesión de Fibonacci* es

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n - \left(\frac{-\sqrt{5}+1}{2}\right)^n\right\}$$

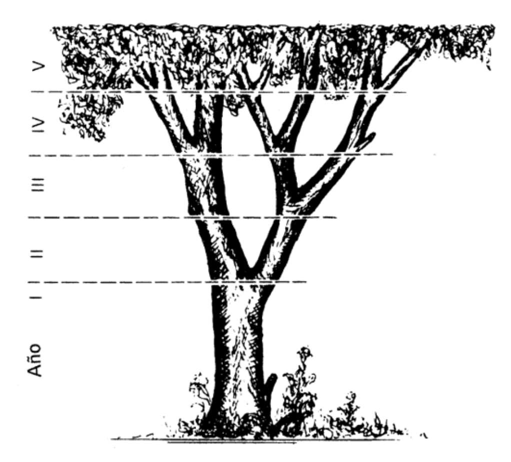


Fig. 47

Podríamos demostrarlo por inducción matemática. (¿Cómo?) Supongamos que un árbol **(47)** eche una nueva rama al cabo de un año, que después descanse un año siempre, y que produzca nada más una nueva rama al año siguiente, y supongamos que el mismo proceso sea válido para cada una de las ramas. Entonces, en el primer año sólo tendríamos el tronco; en el segundo, dos ramas; en el tercero, tres: y a continuación, 5, 8, 13, etc., como en la sucesión de Fibonacci.

Los lados del atrio **(48)** observan aproximadamente la razón áurea. La *división áurea* de un segmento es tal que la razón que guarda el segmento total con la mayor de las partes es la misma que la de la parte mayor a la menor. Ambas razones son, pues, áureas. (¿Por qué?)

Podemos *descomponer el rectángulo áureo* en un número infinito de cuadrados, separando primero en el rectángulo el máximo cuadrado posible **(46)**, y procediendo de igual manera con el rectángulo restante, que es también un rectángulo áureo, y así sucesivamente. Al ser traducido a la aritmética, este procedimiento engendra la fracción continua compuesta de unidades, de la que partimos.

Como vemos en el dibujo **(46)** los vértices de los cuadrados yacentes en el rectángulo grande definen dos líneas rectas: una es la diagonal del rectángulo grande; la otra, la del rectángulo restante tras recortar el cuadrado. (¿Por qué?)

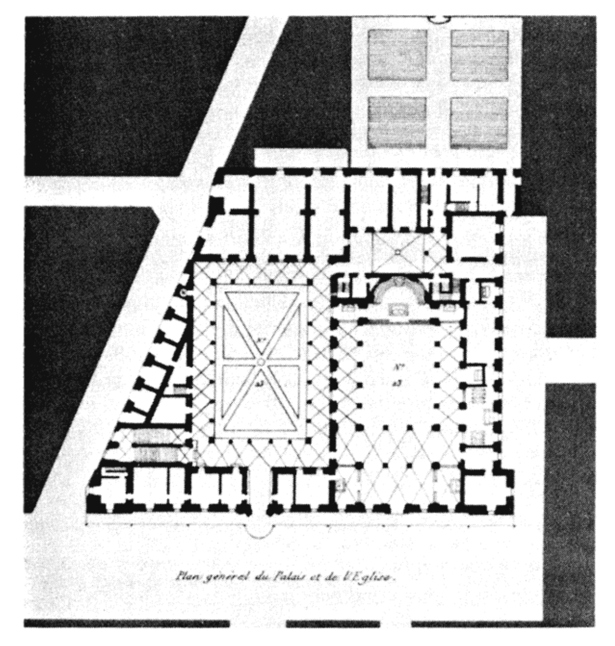
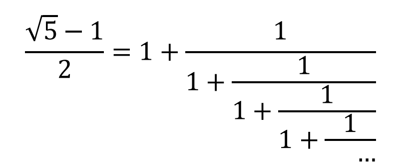


Fig. 48

Los múltiplos consecutivos g, 2*g*, 3g,... del *número áureo g* =(√5–1)/2 = 0,618..., o. mejor dicho, sus partes decimales, exhiben una curiosa uniformidad, que no poseen los múltiplos de las demás fracciones (a excepción de 1–g). El gráfico **(49)** muestra la división de la unidad en 1, 2, 3, ... partes. Fijémonos, por ejemplo, en las partes obtenidas por esta división en cinco partes iguales, y cerciorémonos de que cada una de ellas contiene exactamente uno de los cinco primeros múltiplos del número áureo. Se da la circunstancia de que ello es cierto. Lo sorprendente es que tal uniformidad valga en todo el diagrama (n = l, 2, 3,...10), con sólo tres fallos, frente a 52 éxitos. La profunda razón de que este fenómeno se verifique para casi todos los múltiplos de *g* ha de buscarse en la misteriosa fórmula



$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cdots}}}}$$

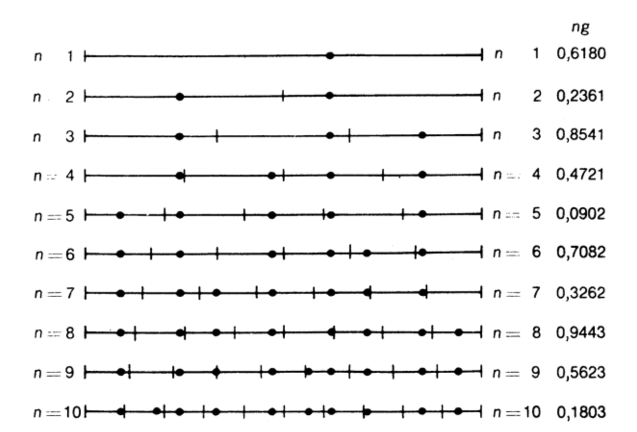


Fig. 49

Si *tres vaqueros* hubieran de cuidar de un rebaño que pasta en un gran campo cuadrado, seguramente dividirían el cuadrado en tres rectángulos iguales **(50)**, y se situarían en los centros de los rectángulos, encargándose cada pastor de vigilar sólo su propio rectángulo. Sin embargo, si el vaquero *C* fuese más espabilado que sus compañeros, seguramente les persuadiría para que dividiesen el campo de otro modo **(51)** que les garantizase a todos una menor distancia a cubrir en caso de emergencia. Esta distancia es igual a la mitad de la diagonal de los nuevos rectángulos, y es la misma para todos los vaqueros: menor que la *máxima cabalgada* correspondiente a la primera división. Al cabo de cierto tiempo, los vaqueros *A* y *B* se dan cuenta de que las áreas a su cargo son mayores que la atendida por *C*, y propondrían una nueva delimitación **(52)**, que ni les haría cambiar de posición en el cuadro, ni afectaría a la longitud de la máxima cabalgada necesaria, y que, además, cumpliría la condición de que cada punto fuese responsabilidad del vaquero

más cercano. *B*, descontento con el nuevo convenio, a causa de la desigualdad de las áreas de las zonas, que sigue siendo favorable a *C*, propone un aumento **(53)** del área asignada a *C*, sin cambiar las posiciones ni los desplazamientos máximos. Habiendo sido aceptado este plan, *A* se queja de que el principio de que sea el más cercano quien atienda cada punto ha sido vulnerado. C replica que es posible respetar el principio si *A* y *B* se avienen a cambiar de posición **(54)**, sin modificar las fronteras. Poco después de haber accedido, *A* y *B* se dan cuenta de que han sido burlados, porque ahora su cabalgada máxima es más larga que la de *C*. Finalmente, los tres acuerdan retornar a la primera división, es decir, a los tres rectángulos iguales.

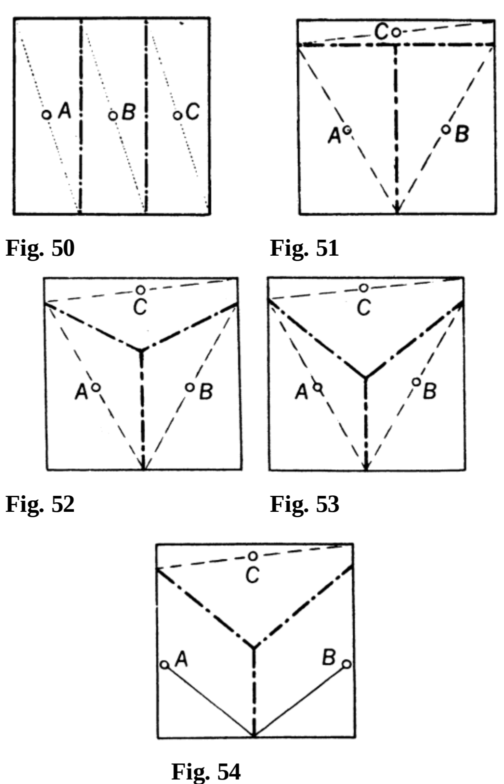


Fig. 50 **Fig. 51**

Fig. 52 **Fig. 53**

Fig. 54

3. Pesadas, medidas, y repartos equitativos

Volvamos por un momento al tablero de ajedrez. La primera fila está cubierta con 1, 2, 4, ...128 granos. Entre la primera y la segunda casilla suman 3 granos; entre la primera y la tercera, 5; entre la segunda y la tercera, 6 granos, etc. Es posible obtener todos los números, desde 1 hasta 255, eligiendo adecuadamente números de la progresión 1, 2, 4,... 128, y sumándolos. Nunca se precisan más de ocho términos.

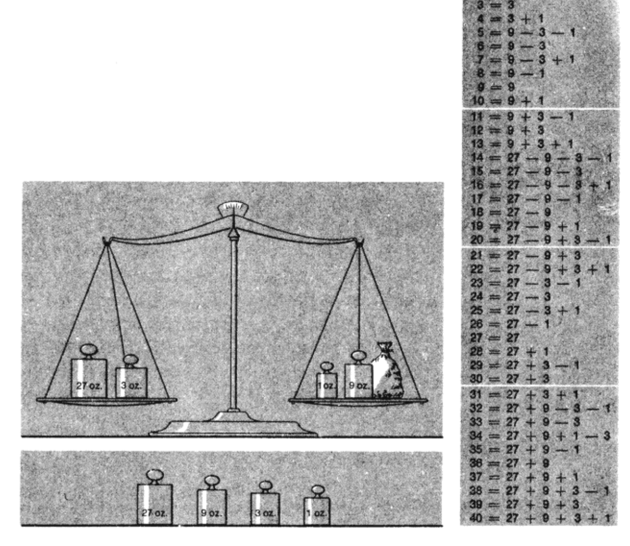


Fig. 55

Nos bastan cuatro pesas **(55)** para *pesar cualquier cantidad*, desde 1 hasta 40, con tal de que sea lícito colocar las pesas en los dos platillos de la balanza. Corresponden las diferentes pesadas a los desarrollos de los números en el sistema ternario, en el que se toma como base, o raíz, al número 3.

Todos los números, desde —40 hasta 40 (excluido el 0) pueden ser expresados mediante ±27, ±9, ±3, ±1, usando uno o más de los cuatro números 1, 3, 9, 27. Hecho que resuelve el *rompecabezas de «los nombres* de las chicas». Anotamos primero 80 nombres de mujer, y les asignamos números, desde –40 hasta +40. Se rotulan 4 tarjetas con las palabras *morena, trigueña, rubia,* y *pelirroja;* uno de los lados de la tarjeta se marca *ojos negros,* y el otro, *ojos azules.* Nosotros asignaremos a «morena» el valor 27, a «trigueña», 9; a «rubia», 3; y a «pelirroja», 1. «Ojos negros» es +, y «ojos azules», el –. Ahora, si Mabel, pongamos por caso, tiene el número –25, tendremos –25 = –27+3–1 y por lo tanto, el nombre «Mabel» tiene que ser escrito tres veces: en la tarjeta de las morenas, por el lado azul, en la de las rubias, por el lado negro, y en la de las pelirrojas, por el lado azul. Se le dan las tarjetas a una persona que no conozca el truco, y se le dice que piense un nombre y que nos dé los posibles matices de pelo y de ojos. Si está pensando en Mabel, nos contestará: puede ser una morenita de ojos azules, una pelirroja de ojos garzos, o una rubia de ojos negros. La persona que tiene el catálogo de nombres calcula mentalmente –27–1+3 = –25 y encuentra en la lista el nombre «Mabel».

Cuando tenemos que comparar objetos en una balanza, sin disponer de un juego de pesas, sólo podemos decir cuál de los dos objetos pesa más. La cuestión que se plantea es cómo hacerlo cuando se trata de más de dos objetos y sólo se nos permite compararlos por pares. Es fácil hallar el más pesado comparando primero un par, después el más pesado del primer par con un tercer objeto, el más pesado de los dos con el cuarto, y así sucesivamente. Procediendo así, necesitaríamos n–1 comparaciones si hubiera n objetos. Lo mismo ocurre en los *torneos de tenis:* para determinar el mejor de n jugadores son suficientes n–1 partidos. Menos n–1 no son suficientes. En efecto, el mejor jugador tiene que haber sido comparado, bien directamente (por el resultado de un partido), bien indirectamente (por los resultados de una cadena de partidos), con cada uno de los restantes jugadores. Si representamos a los jugadores mediante puntos, y los encuentros por líneas, el vencedor habrá de estar conectado por un sistema de líneas con cualquier otro jugador, y, por consiguiente, la totalidad de los n puntos estarán conectados. Ahora es fácil ver **(56)** que necesitamos al menos n–1 líneas para conectar n puntos. Demostraremos este hecho por inducción: sin duda alguna, necesitamos una línea para conectar dos puntos, y si necesitamos n–

1 líneas para conectar n puntos y tenemos que adjuntar un (n+1) enésimo punto, éste habrá, ciertamente, de estar conectado mediante una nueva línea a alguno de los puntos antiguos, y tal paso da n líneas, como nos hacía falta. Los torneos suelen jugarse por el método de eliminatorias: los jugadores se enfrentan por pares; con los vencedores de la primera ronda se forman nuevos pares, lo que da la segunda ronda, y así sucesivamente, hasta que el partido final decide el campeón absoluto. Así, por ejemplo, si tenemos **(57)** 8 jugadores, habrá 4 encuentros en la primera ronda, 2 en la segunda, y 1 en la tercera. O sea, 7 encuentros en total. Es imposible, como ya hemos demostrado, reducir este número.

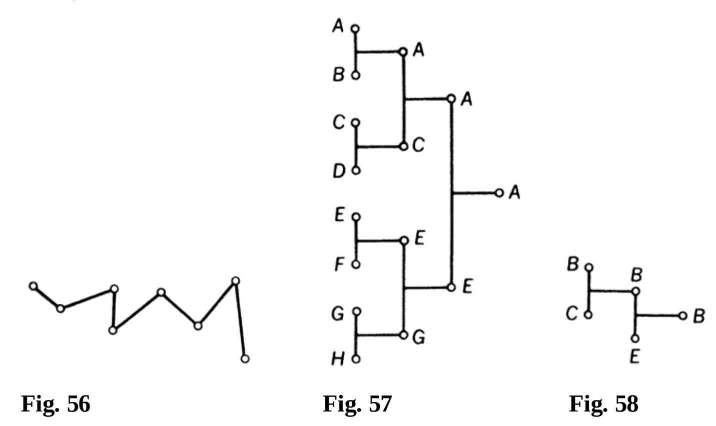


Fig. 56 **Fig. 57** **Fig. 58**

Ahora bien, existe la costumbre de dar el segundo premio al finalista, es decir, al jugador que ha perdido en el encuentro de la última ronda. Este sistema es, obviamente, injusto, pues este jugador no ha sido comparado con los jugadores *B* y C, que solamente fueron derrotados por el vencedor del primer premio, y, por consiguiente, eliminados antes de la última partida. En un torneo de 8, el número de estos jugadores es de 3. Hace falta un torneo adicional, de sólo dos partidas **(58)**, para determinar al mejor de los tres.

En general, para determinar los dos mejores jugadores de entre n participantes son suficientes n–1+[$\log_2$(n–1)] encuentros. Se ha demostrado también que ningún número menor es suficiente en el caso general. Aquí, «en el caso general» significa que no se dispone de ningún método efectivo para

determinar los dos mejores jugadores en todos los casos, y que utilice un número de partidos inferior al dado anteriormente. El hecho de que de una forma accidental pueda suceder que *A* venza a *B*, que *B* venza a *C*, que *C* venza a *D*, y así sucesivamente, de modo que al cabo de *n*–1 partidas no sólo habremos determinado el campeón y el subcampeón, sino también establecido totalmente la clasificación, *A, B, C, ..., N* no sirve como argumento a favor del método de la cadena, en la forma aquí descrita ni en contra del método de eliminatoria con un torneo adicional; tan sólo abrevia el procedimiento porque los jugadores fueron casualmente inscritos por orden en relación con su habilidad.

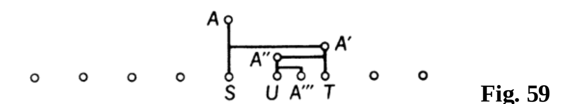


Fig. 59

Para *ordenar* la totalidad de los *objetos* pesándolos por parejas (y lo mismo es válido para *clasificar a los jugadores* mediante partidos) podemos adoptar el siguiente procedimiento: Supongamos que ya hemos ordenado un conjunto de objetos, y que debamos encontrar entre ellos el lugar que le corresponde a uno nuevo **(59)**. Primero buscamos la mediana, es decir, el objeto S que tiene tantos objetos por encima de él como por debajo. Si el número de objetos es par, llamaremos medianos a los dos objetos situados en el centro de la gama. Seguidamente, comparamos el nuevo objeto *A* con la mediana. Si resultara más pesado, lo compararemos con la mediana *T* de la mitad superior; si más ligero, con la mediana de la mitad inferior, y así, sucesivamente, hasta que encuentre su lugar *A'''* entre dos elementos vecinos *U* y *T* de la gama. Comencemos con dos objetos. Para ordenarlos por peso, con una pesada será suficiente; para situar un tercero, a lo sumo son necesarias dos pesadas; para situar un cuarto objeto entre tres previamente clasificados, lo comparamos con la mediana, y después, si es más pesado, con el más pesado de los tres, y si es más ligero, con el más ligero: hacen falta, pues, dos pesadas. Obtenemos de esta manera la siguiente secuencia:

Para colocar un nuevo objeto entre

1	2	3	4	5	6	7	... objetos ya colocados
1	2	2	3	3	3	3	... pesadas son suficientes.

Por lo tanto, para ordenar totalmente

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	… objetos
0	1	3	5	8	11	14	17	21	25	29	33	... pesadas

son suficientes. (¿Cómo?)

La fórmula correspondiente a n objetos es

$$1+kn-2^k\ ,\ \text{siendo } k = 1+[\log_2 n].$$

Se ha demostrado que el número k, por sí sólo, es suficiente para el número de pesadas en los casos n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11; para n = 12 la fórmula da k = 29. Se ha demostrado que 29 pesadas no son suficientes para 12 objetos; 30 pesadas, sin embargo, sí lo son.

Este método tiene interés, no sólo para la clasificación de jugadores y de equipos, sino también en la ordenación de objetos cualesquiera (por ejemplo, las fichas de un fichero alfabéticamente ordenado).

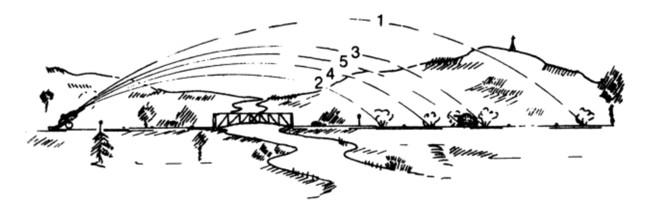


Fig. 60

Nuestro método de pesada nos recuerda un *problema de artillería* **(60).** Hay un tanque emplazado en una carretera, y el observador de artillería informa en qué tramo de carretera está situado. Al artillero le es posible alcanzar el punto de la carretera que desee, pero la información que recibe del observador acerca de los efectos del tiro solamente estriba en «largo» y «corto». ¿Cómo debe proceder el artillero? Su estrategia óptima consistirá en disparar primero al punto medio del tramo; después, al punto medio de la primera mitad si el tiro fue «largo», y al punto medio de la segunda mitad si fue «corto», y así sucesivamente, tomando los puntos medios de los segmentos. La distancia máxima entre el objetivo y el mejor de los n primeros tiros es de $L/2^n$, siendo L la longitud del tramo. Este resultado, correspondiente al caso menos favorable, solamente se da si el tanque se encuentra en uno de los extremos del tramo.

Podemos considerar el problema como un juego. Si el enemigo conoce el método que sigue el artillero, situará su tanque de modo que se encuentre lo más alejado posible de los n primeros tiros. Si este método es el de división en mitades, lo mejor que podrá hacer es situarse en uno de los extremos: tal proceder le da un margen de seguridad de $L/2^n$. Veamos qué sucede ahora, si el artillero ha elegido otro método, y su enemigo lo ha descubierto, sea por medio de espías, o por su sagacidad. En cualquier caso, el método tendrá por consecuencia una serie de disparos, y ésta será la misma en los dos experimentos si la serie de señales «largo» y «corto» es en ambos casos la misma, ya que el artillero no dispone de ninguna otra información. Tomemos primero el caso $n = 1$, es decir, un único disparo. No hay ningún método que permita reducir el error a menos de $L/2$ con un solo tiro. Únicamente un método reduce el error menor o igual que $L/2$ en todos los casos: disparar al punto medio. Si se adopta este método, no existe ningún otro, para reducir al máximo la distancia en el tiro siguiente, que el de apuntar al punto medio de la primera o la segunda mitad, conforme sugieran las señales «largo» o «corto». Tal proceder reduce el error a $L/4$ como máximo. Sin embargo, si el primer tiro no fue disparado al centro, el enemigo, que sabía antes de empezar la batalla que así iba a ser, dispone ahora de un segmento mayor que $L/2$ para situar su tanque. Sabemos ya que el artillero puede reducir esta distancia a la mitad si utiliza su mejor método, pero incluso en tal caso tendrá un error máximo mayor que $L/4$.

En consecuencia, hemos demostrado que el popular método de ir dividiendo a la mitad es el óptimo cuando $n = 2$. El mismo resultado es válido, por inducción, para todo n. El método clásico parece ser óptimo en el sentido que recibe el término en la teoría de juegos. Sin embargo, no hemos demostrado todavía que lo sea en el sentido de la teoría de la probabilidad, es decir, que reduzca al mínimo la esperanza matemática de la distancia. Si se suponen equiprobables todas las posiciones del tanque, se obtiene la misma solución que antes.

Cuando es permisible poner en la balanza varios *pesos* a la vez, el *problema* de su *ordenación* es totalmente distinto del ya examinado. Si tenemos 9 *monedas* de idéntico aspecto, y sabemos que una de ellas es *falsa*, y que por ello pesa menos que cualquiera de las auténticas, dos pesadas nos bastarán. Ponemos tres monedas en cada platillo, y si uno de los brazos se alza,

comparamos dos de las tres monedas que contiene: si pesaran igual, la tercera restante será la falsa; y si una fuese más ligera, ésta sería la falsa. Por otra parte, si la primera comparación no mostrase diferencia de pesos, compararemos dos de las tres monedas restantes para descubrir la falsificada. El problema es más complicado si tenemos 13 monedas, una de las cuales es de peso diferente a las demás, pero no sabemos si es más ligera o más pesada que las monedas normales. Empero, bastan tres pesadas para hallar la moneda falsa **(61)**. La primera columna del dibujo muestra la primera pesada. Se utilizan 8 monedas, cuatro en cada platillo, y se pueden dar dos casos: diferencia de pesos, e igualdad de éstos. En cada caso, se hará seguidamente una segunda pesada, que vemos en la segunda columna; y en cada caso, esta segunda pesada genera tres posibles resultados: (I) el platillo con tres monedas 1, 2, 3, del primer grupo se hunde; (II) se alza; (III) permanece en equilibrio. Tenemos ahora seis resultados, cada uno de los cuales conduce a la comparación de un par de monedas. Los resultados se muestran en la tercera columna: hay 18 casos en ella; la moneda falsa aparece rodeada de un doble círculo; las flechas indican si es más ligera o más pesada. Hay un único caso en el que hemos hallado la moneda falsa, 13, sin poder determinar si es más ligera o más pesada que las auténticas. Para comprender el procedimiento empecemos por estudiar la primera línea del diagrama. La primera pesada ha mostrado que hay diferencia de peso entre las monedas 1, 2, 3, 4 y las 5, 6, 7, 8. La moneda falsa está, por lo tanto, entre ellas. En la segunda pesada, la moneda 4 del platillo izquierdo ha sido sustituida por la 8. Sin embargo, el platillo izquierdo siguió bajando, lo mismo que en la primera pesada: lo que demuestra que 4 y 8 son iguales, y, por lo tanto, auténticas ambas. Ahora, la primera pesada ha demostrado ya que las monedas 9, 10, 11, 12, 13 son buenas; así pues, en la segunda pesada, todas las monedas del platillo derecho son buenas, y, como hay desigualdad, la moneda falsa debe encontrarse en el platillo izquierdo, que contiene las 1, 2, 3, 8, dado que 8 es buena, una de las monedas 1, 2, 3 es mala, y pesa más. En el tercer paso comparamos 1 y 2, y vemos que baja el platillo cargado con 1, lo que demuestra que 1 es falsa y demasiado pesada. Obtenemos de modo similar los resultados de los 18 casos.

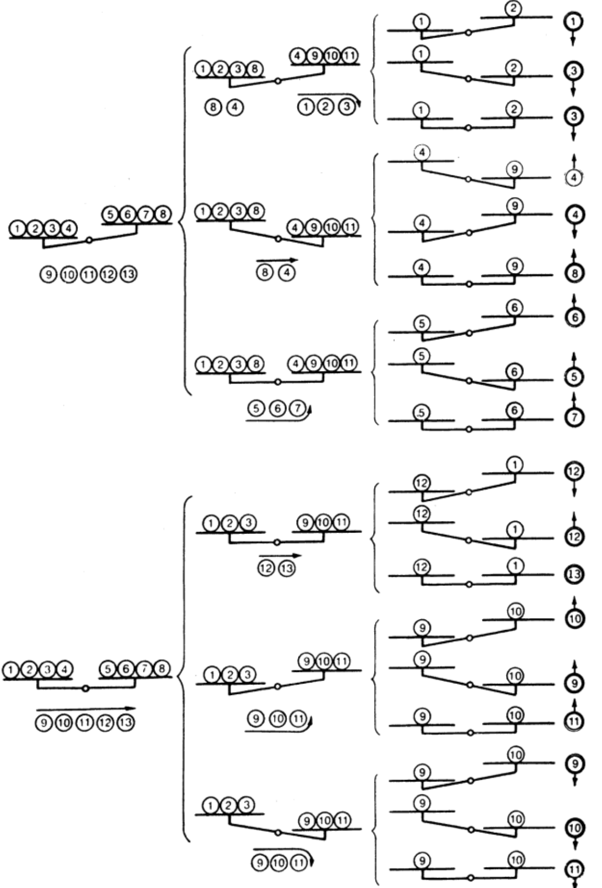


Fig. 61

Sin embargo, es interesante estudiar el caso que nos lleva hasta la moneda falsa sin decirnos si es demasiado pesada o demasiado ligera. La primera pesada revela equilibrio entre 1, 2, 3, 4 y 5, 6, 7, 8. La moneda falsa se encuentra entre las 9, 10, 11, 12, 13; la flecha horizontal indica que no sabemos si pesa más o si es demasiado ligera. Una segunda pesada registra equilibrio entre 1, 2, 3 y 9, 10, 11. Por lo tanto, estas monedas son buenas,

y la falsa ha de ser la 12 o la 13. Comparando la 12 con la 1, que sabemos que es auténtica, encontramos equilibrio en la tercera pesada, lo que prueba que la 12 es buena y la 13 falsa, pero como, durante el proceso, la moneda número 13 no fue tocada para nada, no sabemos si es demasiado pesada o demasiado ligera.

Ha sido demostrado que n pesadas son suficientes para descubrir una moneda mala de entre un total de $(3^n–1)/2$, y que tal número no puede rebajarse. El significado de esta afirmación ha sido explicado ya: si bien no existe método alguno que garantice el resultado en menos de n pesadas, sí es posible, en dos pesadas, descubrir por accidente cuál de las 13 es la moneda falsa. Cuatro pesadas son necesarias y suficientes para 40 monedas. El lector podrá hallar, de entre cuatro, en dos pesadas, la moneda mala (caso $n = 2$).

La *medición de líquidos* se efectúa mediante recipientes de capacidad bien definida. Si tenemos tres probetas cuyas capacidades son, respectivamente, de 12, 7 y 5 litros, y tenemos que dividir en dos partes iguales 12 litros de *vino* contenidos en la probeta más grande, podemos hacerlo mediante una *mesa de billar* adecuada **(62)**, de forma romboidal, cuyos ángulos sean de 60° y 120°. Tenemos que imaginar las probetas yacentes sobre el plano de la mesa, y que las líneas trazadas desde la mesa de billar determinan en cada instante el nivel de líquido en las probetas.

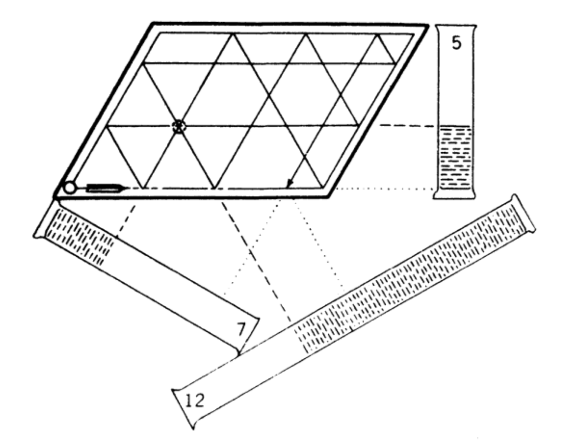


Fig. 62

Así pues, repartiremos el vino en dos partes iguales utilizando el siguiente procedimiento: situamos la bola de billar en el ángulo inferior izquierdo, y la disparamos a lo largo del lado inferior. En tanto la bola rueda uniformemente hacia adelante, se hace fluir el vino desde la vasija mayor a la mediana, como vemos en la figura **(62)**, hasta llenar ésta. Al chocar la bola contra el borde, y cambiar de dirección, de acuerdo con las leyes de la mecánica, el nivel de vino de la vasija grande permanece invariable, pero en cambio habrá de aumentar en la pequeña, a costa del vino de la mediana; etc. El procedimiento ha de continuar hasta que todo el vino quede repartido en dos partes iguales. La figura **(62)** muestra la trayectoria de la bola de billar, que es una línea quebrada; la flecha final muestra el punto en que se logra el reparto requerido.

La trayectoria consta de 11 porciones rectilíneas; así pues, bastan 11 trasvases. Esta es la solución más sencilla. Si inicialmente se lanza la bola a lo largo del lado menor de la mesa de billar, se obtiene otra solución. (¿En cuántos pasos?)

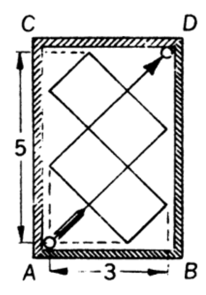


Fig. 63

Si tenemos una *mesa de billar* rectangular, cuyos lados **(63)** se encuentren en razón entera (v. g.: 5:3) una bola disparada desde un vértice con ángulo de 45° acabará entrando en uno de los ángulos al cabo de varios rebotes (seis, en este caso). La figura **(64)** nos suministra la explicación: la trayectoria quebrada de la bola ha sido reemplazada por una línea recta. Los rectángulos representan los sucesivos rebotes de la bola contra los costados de la mesa (que actúan como si fueran espejos). Si la razón de los lados es *p:q*, expresada como fracción irreducible, la bola rebota *p*+*q*–2 veces antes de alcanzar el vértice. (¿Por qué?)

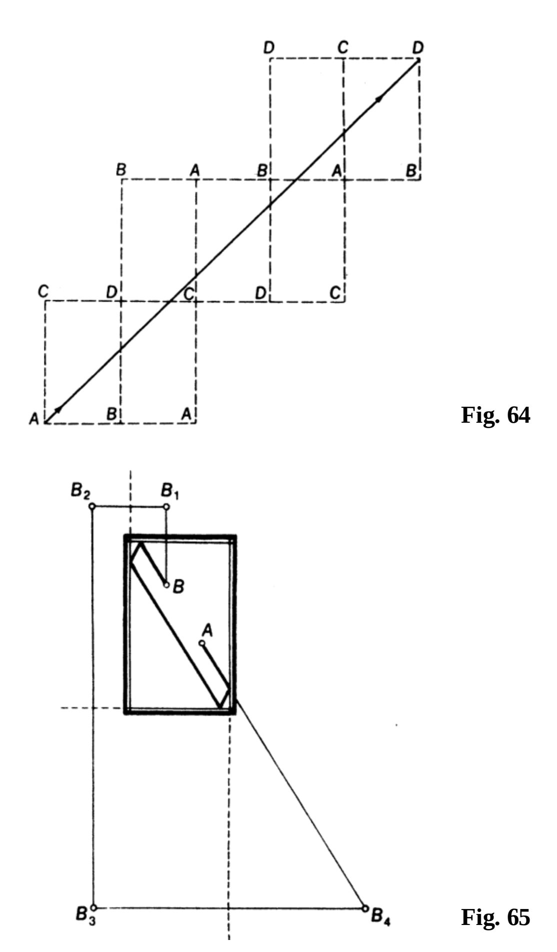


Fig. 64

Fig. 65

Si deseamos que choque la bola *A* contra la *B*, de modo que la *A* toque sucesivamente los bordes derecho, inferior, izquierdo, y superior, hemos de encontrar **(65)** la imagen reflejada, B_1, del punto *B* respecto del borde superior, como si éste fuera un espejo; después, la imagen B_2, reflejo de B_1 respecto del borde izquierdo; a continuación, la imagen B_2 de B_3, respecto del inferior, y, finalmente, la imagen B_4 de B_3 al reflejarse en el borde derecho.

Apuntamos entonces hacia B_4 con la bola *A*. Nos aseguraremos de haber hallado todo posible método de alcanzar nuestro objetivo trazando una red rectangular, como en la figura **(64)**, y situando en cada rectángulo las imágenes B_1, B_2, B_3,... del punto *B*. Uniendo *A* con uno de éstos B_n obtenemos una línea recta. Para obtener la trayectoria quebrada nos bastará plegar los rectángulos a lo largo de los lados comunes, comenzando por el último. Al cabo, terminarán todos por cubrir el primer rectángulo, y si el papel es transparente, aparecerá la trayectoria quebrada. También es posible comprobar el método en el problema de dar en el vértice.

Para *repartir objetos,* como una tarta, en dos partes iguales, cabe adoptar la tradicional costumbre de dejar que uno de los comensales corte, y el otro elija. La ventaja del tal proceder es evidente: ninguno de los comensales impugnará este reparto. El primero se asegurará la parte que le corresponde dividiendo el pastel en dos piezas que él valore por igual; el segundo asegura para sí como mínimo la parte que le corresponde, tomando la que le parezca más valiosa, o, si las juzga iguales, una cualquiera de ellas. Se presume aquí que el objeto tiene la propiedad de no perder su valor total al ser dividido; es decir, que los valores de las partes, conjuntamente sumadas, dan el valor de la pieza total. Se presume asimismo que los socios admiten esta propiedad, aun cuando no estén de acuerdo en la valoración del objeto entero o de sus partes. Existen objetos así: un montón de nueces, por ejemplo. Se plantea ahora el problema de repartir equitativamente un objeto en tres o más partes. La solución nos viene dada por las reglas siguientes, que podemos explicar aquí para el caso de cinco socios. El procedimiento es sustancialmente idéntico para cualquier número de socios. Podemos llamarlos *A, B, C, D* y *E*. *A* tiene el derecho de cortar de la tarta una porción arbitraria; *B* es libre de disminuir la porción cortada por *A*, pero no está obligado a hacerlo; a su vez, *C* tiene el derecho (pero no el deber) de recortar la pieza (tanto si fue ya disminuida como si no), y así sucesivamente. Después de que £ haya hecho uso de su derecho (o declinado valerse de él), nos fijamos en el último en tocar la porción. Supongamos que haya sido *D*. Entonces *D* se ha de quedar con la porción; el resto del pastel (incluidos los recortes) ha de ser dividido equitativamente entre *A, B, C* y *E*. En la segunda ronda, el mismo procedimiento reduce el número de socios de cuatro a tres, y, la tercera ronda, a dos. Finalmente, los dos socios o comensales se reparten el resto del pastel por el procedimiento inicialmente descrito: uno corta y el

otro elige. Veamos ahora cómo cada uno de los socios puede asegurarse la parte que le corresponde, hagan sus compañeros lo que hicieren. Si en la primera ronda, *A* corta una pieza que él considera ser 1/5 del valor, puede ocurrir que nadie lo toque, siéndole asignado a *A;* en este caso, *A* no ha sido defraudado. Si, sin embargo, uno o más de sus compañeros reduce esta porción, la última persona en tocarlo habrá de quedarse con ella, y, puesto que ha sido disminuida, *A* debe considerar que quedan más de las 4/5 partes del valor a repartir entre 4 socios, uno de los cuales es él. En la segunda ronda, *A* tiene que proceder como antes; y si se diera la circunstancia de que también esta vez le toca ser el primero, tendrá que cortar una porción que él considere ser 1/4 del valor de lo que resta.

Esta política no es suficiente. Tenemos que mostrar cómo ha de comportarse un comensal cuando no sea el primero. Supongamos que *B* considere que la porción cortada por *A* es demasiado grande, es decir, según la estimación de *B,* el valor de tal porción es mayor que 1/5 del total. Lo único que tiene que hacer es disminuirla hasta el valor que juzgue correcto; si resulta ser el último en hacerlo, le es asignada, y no es defraudado. Si no llega a conseguirla, es porque algún otro ha tocado la porción después de que hubiera sido disminuida por *B* hasta un valor que él consideraba ser de 1/5. La porción recibida por quienes la disminuyan después que *B* tiene un valor que *B* considera inferior a 1/5; así pues, *B* pasa a la ronda siguiente como partícipe de un resto que él considera mayor que 4/5 del total de la tarta, siendo ahora 4 el número de comensales, y *B* uno de ellos. Ahora el método está claro: si en una de las rondas se es el primero de n comensales, lo que se debe hacer es cortar una porción que se juzgue vale la *n*-ava parte del valor de la parte se tenga delante, tanto si es el total del pastel, o lo que reste de él. Si no somos los primeros en la ronda en cuestión, y vemos que uno de nuestros compañeros corta, a nuestro juicio, una porción mayor que la *n*-ava parte del monto a repartir, lo que procede es rebajarla hasta la *n*-ava parte; y si, en nuestra estimación, la tajada es de una *n*-ava parte, o menos, la dejaremos pasar. Este método garantiza que todo el mundo reciba la parte que considere ser la que le corresponde.

La *división equitativa* da pie al siguiente juego. Sobre la mesa, dentro de un círculo, se encuentra un montoncito de monedas diferentes **(66).** Los jugadores, que han aportado por igual al pote, tienen que repartírselo entre

ellos según nuestro procedimiento de «reparto de la tarta». En lugar de cuchillo, tienen un rastrillo con el que arrastrar las monedas fuera del círculo, o devolverlas al montón, procedimiento similar al de «cortar» y «rebajar» las tajadas. Dado que las maniobras han de ser efectuadas con un solo movimiento, el resultado depende del discernimiento y habilidad de los jugadores.

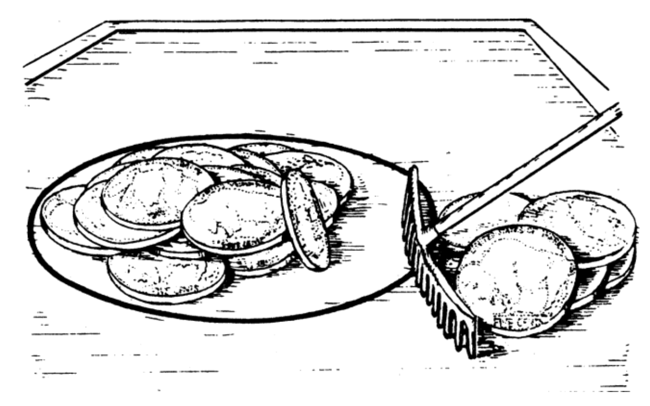


Fig. 66

En la vida económica se presenta otro problema de división: la de objetos indivisibles, como casas, animales domésticos, muebles, automóviles, y obras de arte. Supongamos, por ejemplo, que una herencia, compuesta por una casa, un molino, y un auto, haya de ser repartida entre cuatro herederos, *A*, *B*, *C* y *D*, que han de recibir partes iguales. El reparto suele hacerse, por lo general, recurriendo a un tasador jurado, quien determina los valores de los objetos, a fin de que los herederos puedan elegirlos, y, en principio, si están de acuerdo, satisfagan mediante pagos en efectivo las mutuas reclamaciones que provengan de las diferencias de valor.

Este procedimiento tiene muchos inconvenientes, derivados de la determinación del valor objetivo de las cosas, sea por un perito oficial, o por un tribunal de justicia. Es posible, sin embargo, llegar a un reparto equitativo sin que sea preciso recurrir a ellos.

Un árbitro, quien solamente tiene que actuar como si fuera un autómata, para llevar registros de las tasaciones y efectuar los cálculos, convoca a los herederos para que notifiquen individualmente, y por escrito, su valoración

de los distintos bienes. Aunque se les permite asesorarse por medio de amigos y de personas experimentadas, no se supone que los herederos hayan de discutir entre ellos el reparto. A la vista de las respectivas tasaciones, el árbitro establece la siguiente tabla de valores:

	A	*B*	*C*	*D*
Casa	$ 6.000	$ 10.000	$ 7.000	$ 9.000
Molino	3.000	2.000	4.000	2.000
Coche	1.500	1.200	1.000	1.000
Suma	10.500	13.200	12.000	12.000
Parte	2.625	3.300	3.000	3.000
Valor	1.500	10.000	4.000	0
Reclamación	1.125	–6.700	–1.000	3.000

En la tabla precedente, la parte de cada persona se calcula dividiendo entre cuatro su valoración del total. Vemos recuadrada en cada hilera la máxima valoración de cada bien, que le será adjudicado a la persona cuyo nombre encabece la columna. Así pues, *A* recibe el coche, *B* la casa, y *C* el molino. Los valores de los objetos, restados de las partes de las personas a quienes han correspondido, son el valor a reclamar. Así, *A* aparece con una reclamación de $1.125 ; *D*, con una de $3.000 ; mientras que *B* tiene una reclamación negativa de $6.700 y *C* una reclamación negativa de $1.000.

Significa esto que *B* y *C* tienen que pagar dinero al árbitro, y que *A* y *D* deberán recibirlo de él:

A	$ 1.125	*B*	$ 6.700	$ 7.700
D	3.000	*C*	1.000	– 4.125
	4.125		7.700	3.575 + 4 = 893,75

Este cálculo muestra que los pagos dejarán al árbitro con un excedente de $3.575. Dividiendo entre 4, se tienen $893,75 para cada heredero. En resumen:
A recibirá el coche y

$1.125+$893,75 = $2.018,75 en efectivo,

B recibirá la casa, y tendrá que pagar

$$\$6.700–\$893{,}75 = \$5.806{,}25,$$

C recibirá el molino y tendrá que pagar

$$\$1.000–\$893{,}75 = \$106{,}25,$$

D recibirá $3.000+$893,75 = $3.893,75.

Así pues, cada uno recibe finalmente más de lo que considera ser la parte que se le debe, estando tanto el valor del total como el de los objetos que le son asignados de acuerdo con su propia valoración. Por ejemplo, *A* tiene un coche y $2.018,75 en efectivo. Dado que el coche vale, a su juicio, $1.500, tiene un total de $3.518,75, mientras que la estimación que hizo de su parte era de sólo $2.625. Ha recibido $893,75 a mayores de la parte que le correspondía, y lo mismo es válido para los demás coherederos. El método es efectivo igualmente aun cuando las partes a recibir sean diferentes, y además es posible modificarlo para reducir los pagos en efectivo. (¿Cómo?)

El sistema más sencillo de *dividir una parcela de terreno* es hacerlo sobre un plano. Supongamos que tres copropietarios de un jardín deseen dividirlo en otras tantas partes iguales: dibujan en papel vegetal, a la misma escala, tres copias del plano del terreno. Ahora cada copropietario traza sobre este plano dos trazos perpendiculares a la calle, líneas que, según él, dividan el jardín en tres partes iguales. No es preciso que las áreas de las partes sean exactas, ya que el terreno puede ser de distinta calidad o valor. Además, si alguno de los propietarios tiene su casa adosada al jardín, apreciará más el terreno adyacente que otra parcela que se halle más distante. Como es obvio, lo que importa aquí es el valor subjetivo.

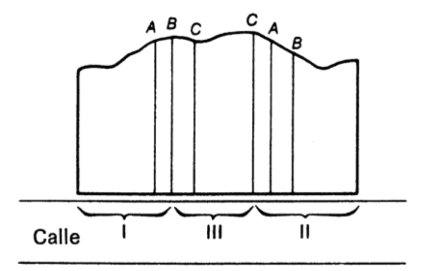


Fig. 67

Al superponer los tres planos vemos seis líneas rectas, marcadas con las iniciales de los nombres dados (Alberto, Benito y Carlos). Si la disposición de las líneas fuera la que vemos en el dibujo **(67)**, el árbitro le asigna la parte la *A,* la parte II a *B,* y la parte III a C, dando así a cada propietario más de la tercera parte del (valor del) jardín, según la propia estimación de cada copropietario.

Hay 8 posibilidades diferentes, pero siempre existe una división posible que, al menos, dé a cada uno 1/3 de lo que, según él, vale la parcela. La ventaja de este método (división sobre un plano) es que todos los copropietarios son admitidos simultáneamente a la determinación de las partes; las líneas divisorias provisionales les son desconocidas a quienes no las dibujaron. El papel del árbitro es puramente automático, y queda definido por el principio de que cada copropietario ha de recibir, por lo menos, lo que estima que es una tercera parte del jardín. En algunos de los ocho casos distintos que se pueden dar, el árbitro tiene que partir por la mitad algunas de las parcelas, sin violar, sin embargo, este principio.

La división equitativa de un pastel en tres partes se logra del modo siguiente:

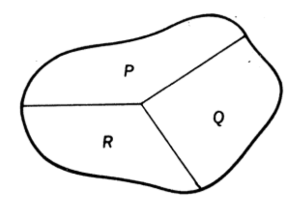


Fig. 68

El comensal *A* traza tres líneas **(68)** sobre el pastel, y tiene que manifestar que, según él, las tres porciones, *P, Q* y *R,* son del mismo valor. Pudiera ocurrir que *B* considerase que la porción *P* le conviene: le será concedida en cuanto la solicite. Si a *C* le gusta *Q,* puede quedársela; entonces, *A se* queda con *R:* su declaración inicial implica que ha de darse por satisfecho sin ser preguntado. Nuestra suposición, sin embargo, peca de optimista. Pudiera ocurrir que *B* y *C* deseasen ambos la porción *R,* por considerar los dos que su valor es superior al de un tercio del pastel, y que ambos declarasen inaceptables las partes *P* y *Q,* es decir, que cada una de esas porciones es, a su juicio, menor que la tercera parte del valor del pastel. Entonces, *A* se queda con *P,* dado que *B* y *C* conceden a *P* menor valor de un tercio del

total, tienen que admitir que la porción $Q + R$ tiene un valor superior a dos tercios del total. Se deduce, así, que *B* y *C* pueden repartirse la porción $Q + R$ según el principio de que «uno reparte, y el otro elige».

Cuando se sigue el procedimiento de *representación proporcional,* se tiene el problema del *reparto de escaños.* Lo explicaremos para tres partidos, *A, B* y *C,* suponiendo que la proporción de votos registrados esté exactamente calculada, y que los escaños de la Asamblea hayan de ser proporcionalmente distribuidos. Para evitar las fracciones, se empieza por adjudicar a cada partido tantos escaños como indiquen las partes enteras de la fracción del total que le corresponda; después, se ordenan por valor las partes decimales, y cada partido recibe por turno un escaño adicional correspondiente a su fracción, hasta que todos los escaños estén distribuidos. Por ejemplo, supongamos que de una demarcación electoral hayan de salir cinco diputados, y que hayan sido registrados 150.000 votos. Los partidos *A, B,* y *C* reunieron 43.500, 69.000 y 37.500 votos, respectivamente. Reclaman, por lo tanto, 1,45, 2,3 y 1,25 escaños, respectivamente. Se les adjudican primero 1, 2 y 1 escaños, respectivamente; los restos 0,45, 0,3 y 0,25 indican que el quinto escaño ha de serle asignado al partido *A.* Por consiguiente, el resultado de la elección es: *A* = 2 escaños, *B* = 2 escaños, y *C* = 1 escaño.

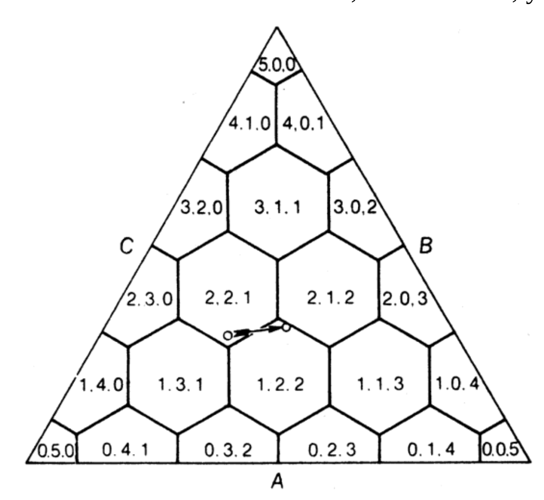


Fig. 69

Si tenemos un triángulo equilátero **(69)** de 5 unidades de altura, la suma de las distancias de cualquier punto interior a los tres lados *A, B, C* será siempre de 5 unidades. Dado que hay 150.000 votantes y 5 escaños, podemos representar por una unidad cada escaño, o sea, 30.000 votos. Según este criterio, cada posible resultado electoral quedará representado por un punto del triángulo, midiéndose la distancia desde los lados *A, B, C* en unidades que dan el número de escaños teóricamente logrados por los partidos *A, B, C.* Por ejemplo, el punto indicado por el circulito es el correspondiente al resultado electoral recién mencionado, pues sus distancias a los lados son de 1,45, 2,3 y 1,25 unidades, respectivamente. Todos los puntos que en la práctica producen un mismo reparto de escaños llenan un hexágono regular. En nuestro ejemplo, este hexágono está indicado por 2, 2, 1. Dado que en cada hexágono figura la *distribución de escaños*, podemos obtener directamente del gráfico el resultado final de la elección con sólo contar los números de votos, sin necesidad de calcular los restos. En el dibujo, la flecha indica cómo puede suceder que, sin variar el número total de votos emitidos, el partido *A* aumente los votos recibidos, y, sin embargo, perder un escaño, que sólo puede ganarlo otro partido que haya mejorado sus resultados. (¿Coincide esto con lo que sucede en el caso designado por la flecha de sentido inverso?). En la forma aquí mostrada, el sistema de *distribución de escaños* corresponde al llamado «sistema de restos mínimos».

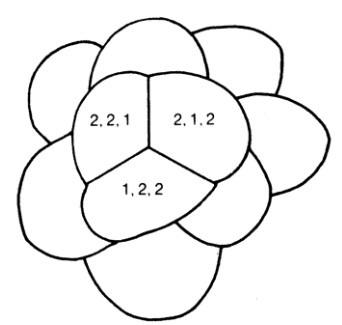


Fig. 70

Existen otros sistemas de representación proporcional, pero ninguno logra eludir la paradoja de que un partido gane más votos y pierda escaños: todo sistema de representación conduce a la división en regiones de un triángulo equilátero. Las tres regiones **(70)** correspondientes a las ternas (2, 2,

1), (2, 1, 2) y (1, 2, 2) son colindantes. Para tratar de evitar la paradoja que hemos mencionado, hemos de trazar dos líneas que formarán las fronteras de la región (1, 2, 2), de tal modo que el ángulo entre ellas, medido por el interior de (1, 2, 2), sea mayor que 180°. Lo mismo debe ocurrir para ambas regiones. Sin embargo, no todos estos ángulos pueden ser mayores de 180°, porque han de sumar 360°.

4. Teselaciones, mezclas de líquidos, medición de áreas y longitudes

Nuestro boceto del sistema de representación proporcional nos recuerda un panal. La fotografía **(71)** muestra el plano totalmente ocupado por celdillas hexagonales. Nunca concurren en un punto más de tres hexágonos; es éste el único caso donde cada vértice es «de grado tres» **(72)**. Cualquier otra división exhibe puntos donde se encuentran más de tres regiones.

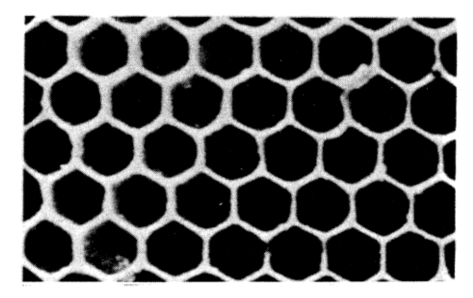


Fig. 71

Hemos mostrado ya la teselación por cuadrados **(15)**. Distorsionándola, podemos deducir de ella teselaciones compuestas por cuadriláteros arbitrarios **(73)**. La teselación de triángulos es la última de esta categoría **(74)**: si nos limitamos a utilizar baldosas de una sola forma y tamaño, cuya forma sea polígono regular, no es posible ninguna otra teselación.

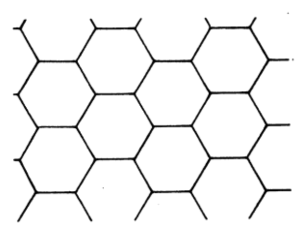


Fig. 72

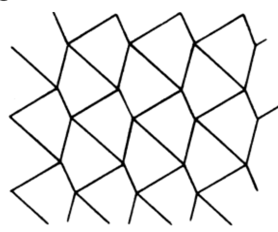


Fig. 73

Con un poco de práctica, se adquiere la facultad de ver el retículo **(74)** sobrealzado algunos centímetros sobre la página. La causa de este fenómeno estriba en la posibilidad de concebir las imágenes que los triángulos diferentes proyectan sobre las retinas izquierda y derecha como proyecciones de un único triángulo situado por encima de la página.

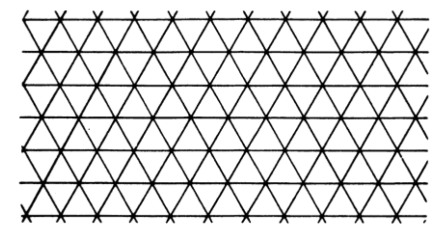


Fig. 74

El ejercicio consiste en aprender a mirar bizqueando a dos triángulos, como muestra el dibujo **(75)**. La principal dificultad estriba en acomodar el enfoque visual a la página mientras los ejes ópticos de cada ojo se dirigen hacia un punto situado por encima de ella.

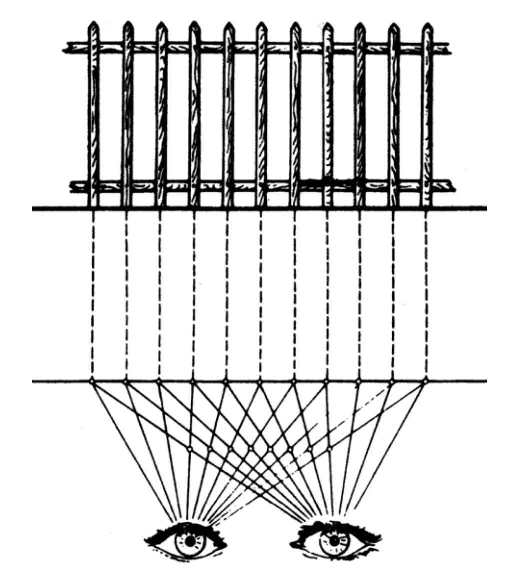


Fig. 75

También es posible recubrir todo el plano con heptágonos convexos **(76)**.

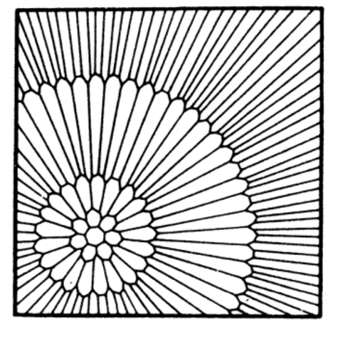


Fig. 76

Se obtienen embaldosados homogéneos utilizando, al mismo tiempo, diversos polígonos regulares para cubrir el plano, de modo que cada vértice sea punto común del mismo número de polígonos del mismo tipo que cualquier otro vértice. Dado que el ángulo de un *n*-gono regular es igual a $2–4/n$ ángulos rectos, o sea, $1/2—1/n$ del ángulo circular completo, para determinar la teselación hemos de hallar enteros positivos *n*, *p*, *q*, *r*... tales que resulte

$$1/2-1/n+1/2-1/p+1/2-1/q+\ldots=1.$$

Este análisis origina 17 diferentes motivos, pero tan solo 11 de ellos pueden extenderse sin traslaparse sobre la totalidad del plano. Estas teselaciones son las tres ya mencionadas, más las ocho siguientes: **(77), (78), (79), (80), (81), (82), (83), (84).** Las teselaciones heterogéneas son, posiblemente, más bellas todavía: **(85), (86), (87), (88), (89).** Su número es ilimitado. (¿Por qué?)

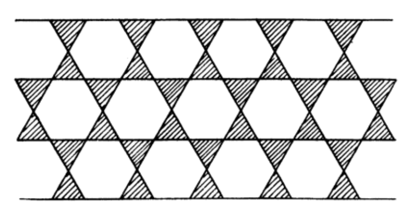


Fig. 77

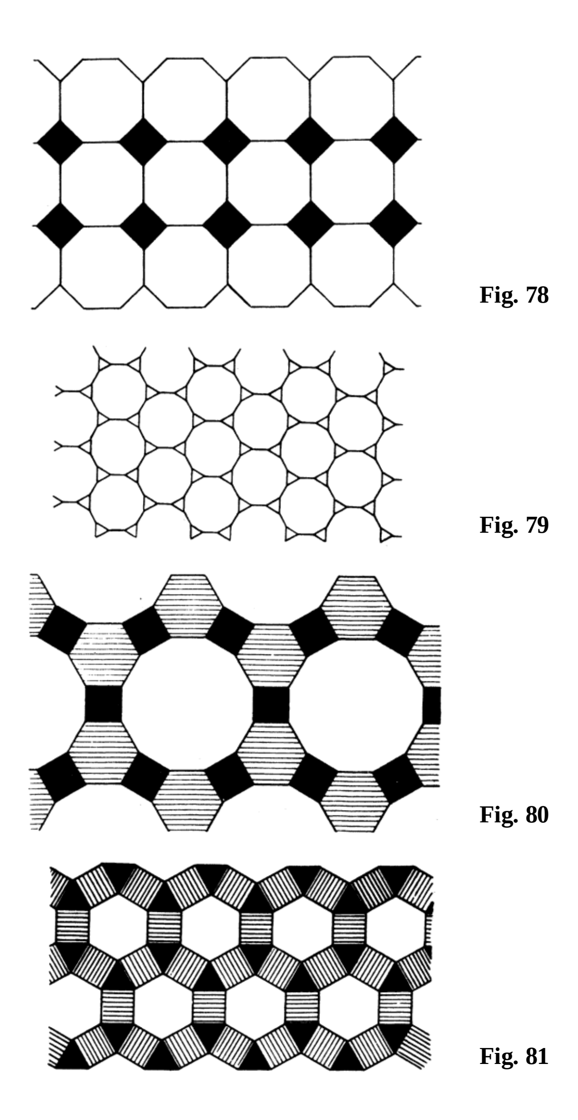


Fig. 78

Fig. 79

Fig. 80

Fig. 81

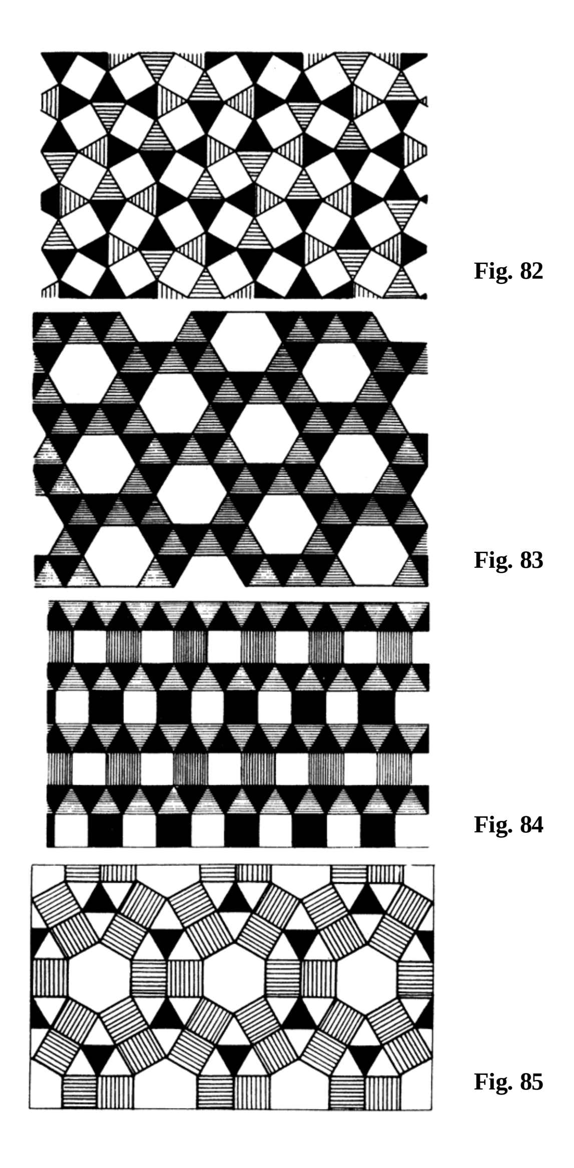


Fig. 82

Fig. 83

Fig. 84

Fig. 85

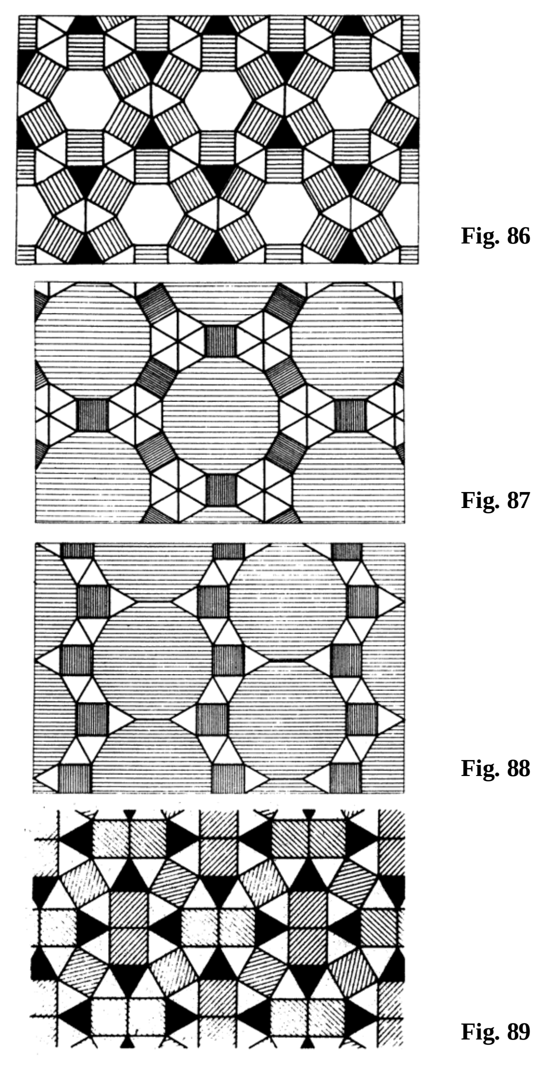


Fig. 86

Fig. 87

Fig. 88

Fig. 89

¿Cuál de estas teselaciones es óptima? La primera, **(72),** es decir, la hexagonal, que vemos en un panal. El significado de «óptima» implica que en

una división del plano, en regiones de una hectárea cada una, la cantidad de material requerido para vallas ha de ser el mínimo posible. Así ocurre cuando las regiones poseen la forma de hexágonos regulares.

Podemos aplicar la división del plano a la fabricación de zapatos. Los pies humanos tienen tamaños diferentes, si situamos en el ángulo de un tablero, un rectángulo de la misma anchura y longitud que el pie, el vértice diagonalmente opuesto del rectángulo define un punto del tablero. Una fábrica de manufacturado de calzados debería hacerse con las medidas de los pies, de un cierto número de personas. Tales medidas darían una nube de puntos sobre el tablero de medida, la cual formaría una región bastante coherente, es decir, que sólo unos pocos puntos se encontrarían alejados del resto. La fábrica no produciría zapatos para quienes tuvieran pies anormales. Por otra parte, la práctica ha demostrado que para pies normales, son suficientes 27 tipos de anchos y largos distintos. Si la fábrica se propone producir 27 tamaños de zapatos, se plantea la cuestión de cómo determinarlos. Obviamente, hemos de elegir en la tabla de medición 27 puntos, de tal modo que cada punto del plano esté lo más cercano posible a uno de los 27 puntos.

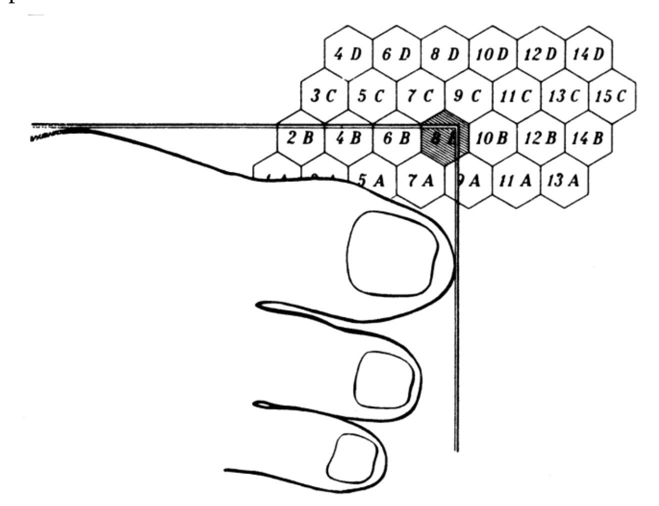


Fig. 90

Los puntos están distribuidos como en el dibujo **(40)**; este es el método rutinario. Cada punto puede ser considerado como el centro de un cuadrado, y la solución rutinaria conduce, por consiguiente, a la pauta cuadriculada. Sin embargo, nuestra proposición anterior sugiere que debiera utilizarse una plantilla hexagonal, donde cada punto fuera el centro de un hexágono regular **(90).** Para nuestros fines, la segunda teselación es mejor que la primera: manteniendo fijo el número de tipos, la distancia desde el punto elegido y los puntos vecinos es alrededor de un 7 por ciento menor, lo que redunda en un mejor ajuste del calzado.

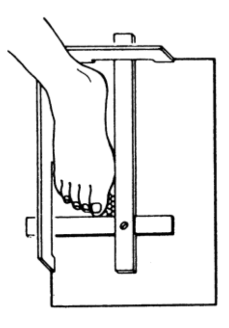


Fig. 91

Supongamos que se tiene una tabla de medición provista de una teselación hexagonal **(91),** y que en cada campo figura marcado el tipo de zapato. Para hallar el número de éste que corresponde, es preciso colocar el pie en el ángulo de la tabla de medición, que estará provista de un reborde sobrealzado. El pie se encuadra entonces con una escuadra móvil: en el hexágono que su vértice indique podremos leer el tamaño correcto del zapato.

Si sobrevolamos un país llano, veremos el campo dividido en parcelas rectangulares, algunas de ellas muy pequeñas. Tal es el efecto de la división de las tierras entre sucesivos herederos.

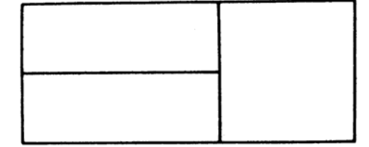


Fig. 92

Suponiendo que en tales divisiones nunca se utilicen más que formas rectangulares, vemos inmediatamente que una figura como la **(92)** es ambigua: lo mismo podría ser el resultado de la división entre tres hijos como entre dos, uno de los cuales, a su vez, ha dividido sus tierras entre dos sucesores suyos. Se ha podido demostrar que un rectángulo compuesto por 3, 4 o 6 parcelas rectangulares es siempre ambiguo. Llamaremos primitivas a las figuras que no sean ambiguas; las figuras siguientes son todas primitivas **(93).**

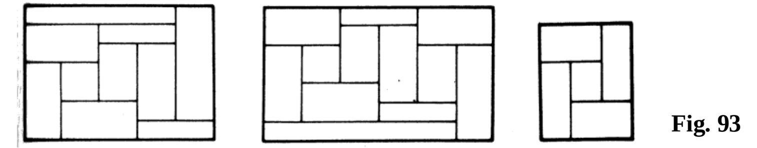


Fig. 93

Es posible construir configuraciones primitivas compuestas por grandes números de parcelas **(94).** Es obvio que para diseños de paredes de ladrillo son preferibles las configuraciones primitivas a las ambiguas. El lector puede hallar otros números de parcelas que formen parte de diseños primitivos.

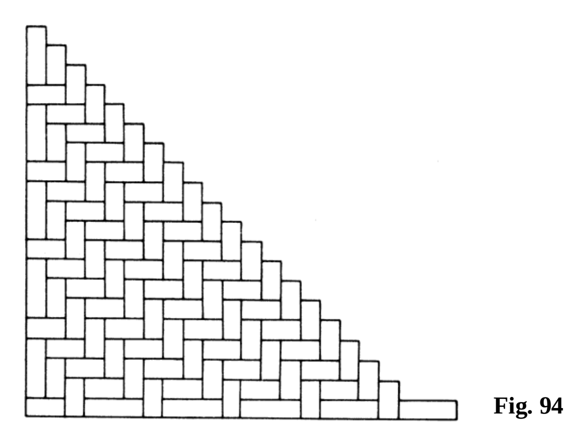


Fig. 94

El dibujo **(95)** muestra una disposición típica de ladrillos en una pared. Los ladrillos están colocados en capas horizontales. Un terremoto podría originar que las capas superiores se deslizasen horizontalmente sobre las

capas más inferiores. La pared **(96)** no presenta este inconveniente: ahora no es posible el corrimiento horizontal. Más todavía: sección plana no hay ninguna que divida la construcción sin cortar algunos ladrillos. Aunque la pared **(97)** es más complicada, no es mejor que la **(96).**

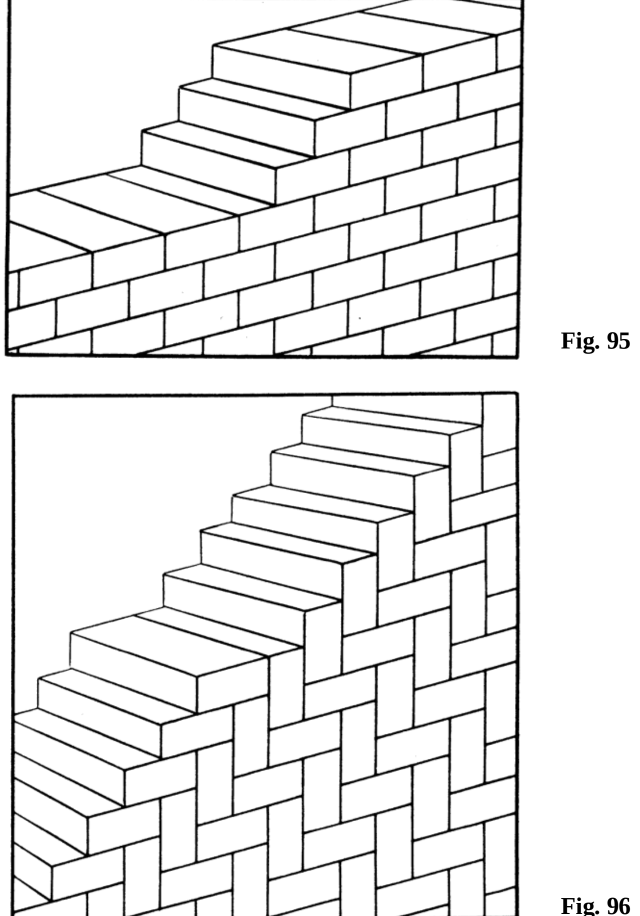


Fig. 95

Fig. 96

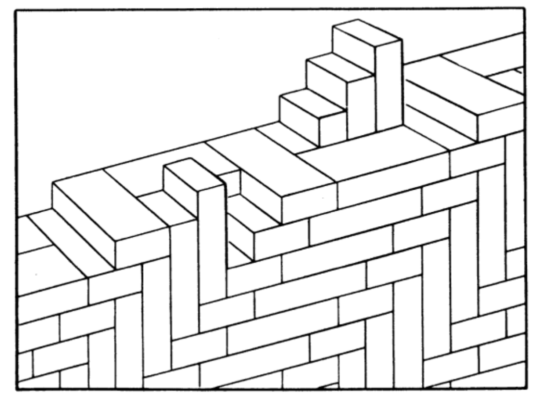


Fig. 97

Las grietas que vemos en las riberas de los ríos cuando el Sol ha resecado el barro **(98),** o en los cacharros de alfarería al exponerlos vacíos al Sol **(99),** parecen ser totalmente irregulares. Sin embargo, por regla general, forman ángulos rectos. Se explica este al suponer que las grietas son un efecto debido a la contracción. Por uno de los principios de la mecánica, la línea que aparezca como fisura tiene que hacer mínimo el trabajo de disyunción. El trabajo es proporcional a las áreas de las secciones, y el trazado de las líneas ha de hacer mínimas las superficies que ha abierto la fisura.

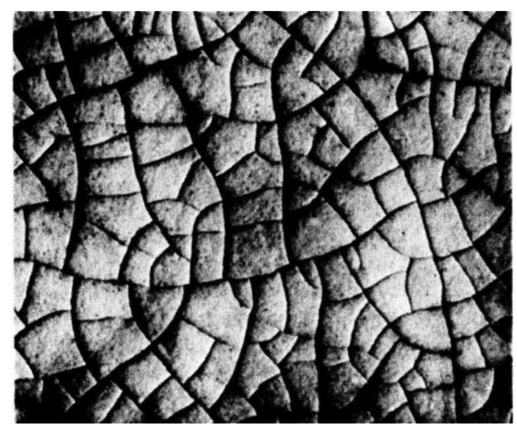


Fig. 98

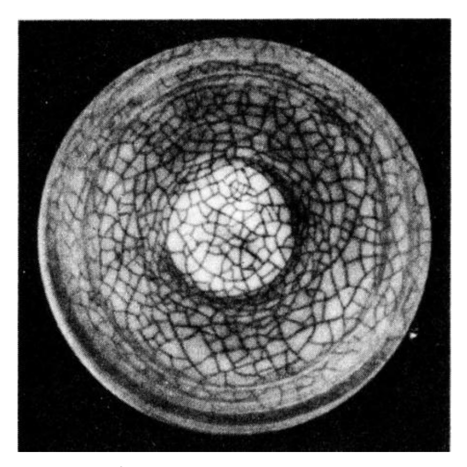


Fig. 99

Si la arcilla fuera homogénea, este procedimiento habría de generar ángulos rectos; la curvatura de las líneas se explica por ser variable el espesor de la capa arcillosa. Esta observación proporciona muchas veces un medio para establecer qué grieta apareció primero, y cuál después: la más antigua de las dos escisiones atraviesa exactamente el punto de conjunción de ambas. Podemos así ir reconstruyendo la evolución de las fisuras, y, al fin, determinar las generatrices del sistema completo.

Supongamos que, inicialmente, la pauta de fracturas estuviera compuesta solamente por dos regiones, *A* y *B.* Aparece una nueva línea, que une dos puntos de los dos arcos ya existentes, y que produce una nueva región, *C* (100). Dado que la nueva línea divide a dos arcos, cada uno en dos partes, el número de éstos aumenta en tres. Al cabo de n pasos más tendremos n regiones adicionales, y $3n$ arcos más. Dado que, inicialmente, había dos regiones y tres arcos, tenemos ahora $n+2$ regiones y $3n+3$ arcos.

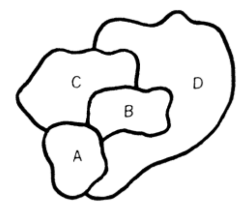


Fig. 100

Apliquemos a los mapas esta idea. Admitido que el exterior (el océano) es una región más, tendremos $n+3$ regiones y $3n+3$ líneas de frontera. Cada frontera es común a dos regiones, y, al dibujarla, aumentamos el número de «relaciones de vecindad» en dos: X-Y e Y-X. Así, pues, acabaremos por tener $6n+6$ relaciones de vecindad, y el número medio de vecinos que tiene cada país es de $(6n+6)/(n+3) = 6–12/(n+3)$. En el caso de una isla dividida en k estados, el número promedio de vecinos por estado es de $6–12/(k+1)$. Este número es menor que 6, pero tiende a 6 conforme el número de países continúa creciendo. Hemos de recordar ahora que el océano cuenta como un país, y que el número k de países en tierra firme es igual a $n+2$. Por ello, el número promedio de relaciones de vecindad es de $6–12/(k+1)$, como hemos dicho.

Deseamos ahora dejar de lado el océano, y no considerar la costa como línea de frontera. Al hacerlo así perdemos un país y, al menos, seis relaciones de vecindad, supuesto que el número de litorales sea de al menos 3. Dado que el número promedio de relaciones de vecindad es menor que 6, el valor medio disminuye, será menor que $6–12/(k+1)$, y, en consecuencia, menor que 6.

Hemos supuesto que el número de litorales era de al menos 3. Ahora bien, podemos trazar un mapa formado, pongamos por caso, por 10 países, y que conste solamente de uno o dos litorales. Así sucederá solamente si permitimos que existan países anulares y, en general, otros que tengan en común varias fronteras desconectadas. No hemos tomado en consideración configuraciones con más de tres regiones concurrentes en un punto. Ahora nos gustaría ver si la regla sobre imposibilidad de llegar al valor 6 se cumple para todos los mapas, con la única condición de que las regiones sean conexas (esta condición no se verificaba en Alemania antes de 1870).

Comenzaremos con una región cualquiera, e iremos trazando una frontera tras otra, conectando cada vez dos puntos fronterizos. Es posible que una tal línea no cree una nueva región (¿en qué caso?), pero, de ser así, tampoco establecerá ninguna nueva relación de vecindad. Suponiendo que sí cree una nueva región, tan sólo será una. Por otra parte, el número de arcos puede aumentar en 1, 2 o 3. En ningún caso se crearán más de 6 nuevas relaciones de vecindad, y, por consiguiente, nuestro razonamiento subsiste: el número promedio de relaciones de vecindad es menor que 6.

Pero todavía tenemos que librarnos del océano, que en nuestro cálculo cuenta como una región. A pesar de todo, la regla subsiste, si tan sólo contamos como regiones las terrestres, y solamente las fronteras terrestres como fronteras. Tal hecho se comprueba examinando diversas configuraciones, pero la demostración parece bastante profunda. El autor no tiene ni siquiera la seguridad de que tal demostración exista...

Imaginemos que a partir del primer año registramos el crecimiento de un niño, del modo siguiente: en un listón en blanco marcamos con trazo negro la estatura del niño, y, a su lado, anotamos su edad. Así, 1 denota el final del primer año; 1,1, el final de la décima parte del segundo año; 2, el final del segundo año, etc.

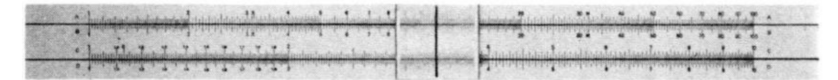


Fig. 101

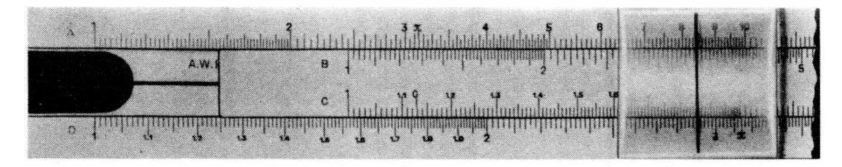


Fig. 102

Supongamos que la tasa de crecimiento sea inversamente proporcional a la edad, es decir, que el aumento de estatura de un niño de 2 años sea la mitad que el de un niño de 1; el crecimiento de un niño de 3 años, la tercera parte; y así sucesivamente. Los números del listón forman entonces una escala, que ha sido llamada escala logarítmica. Podemos encontrar escalas así en la «regla de cálculo» (logarítmica): dos arriba, y dos abajo. De estas cuatro escalas, las dos centrales están grabadas sobre la reglilla **(101)**. No importa cuál sea la posición de esta regleta **(102),** los números situados inmediatamente unos sobre otros, en las dos escalas (fija y móvil) adyacentes, son proporcionales. Aquí, por ejemplo, los números de la escala superior, que es fija, son 2,45 veces mayores que los del margen situado inmediatamente debajo. Por consiguiente, si queremos multiplicar 3,45 por 2,45 desplazaremos el cursor hasta situar la línea indicadora sobre la marca 3,45 de

la reglilla, y leeremos en la regla fija superior el producto, 8,45. En las escalas inferiores vemos los números 1,565, 1,86 y 2,91. El error os del orden del 0,3 por ciento. Los números grabados en la escala superior son los cuadrados de los situados directamente bajo ellos en la escala inferior. En la fotografía, la línea indicadora muestra que $2{,}91^2 = 8{,}45$. Por lo tanto, la regla de cálculo permite igualmente la extracción de raíces cuadradas (¿Cómo?). La regla de cálculo es muy útil para resolver problemas de «regla de tres».

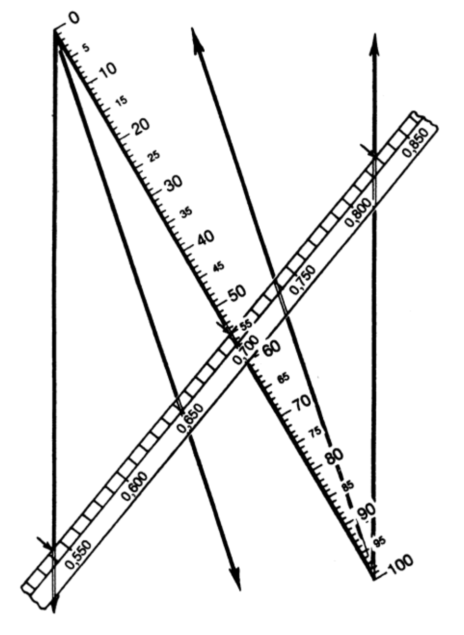


Fig. 103

Al mezclar dos líquidos de distinta densidad, por ejemplo, dos tipos de gasolina, la densidad de la mezcla se determina mediante un nomograma **(103)**. En el dibujo, la escala ancha y oblicua es móvil; en el punto donde ésta intercepta a la línea vertical izquierda leemos la densidad del líquido más ligero; en la intersección con la recta vertical de la derecha, la del más pesado. Entonces, el punto de intersección de la escala móvil con la escala oblicua fija, muestra, en la escala móvil, la densidad de la mezcla, y, en la fija, el tanto por ciento de líquido más denso. Para determinar la densidad

de una mezcla compuesta por un 55% de aceite de densidad 0,830, y de un 45% de gasolina de densidad 0,543, situaremos los puntos 0,543 y 0,830 de la recta móvil sobre las rectas verticales izquierda y derecha, y después la desplazaremos verticalmente hasta hacerla pasar por el punto 55 de la escala fija: en este mismo punto, la escala móvil señala 0,701, que es la densidad de la mezcla, que debíamos hallar. El teorema es consecuencia de la semejanza de los triángulos que una y otra escalas definen. Cuando las densidades de los ingredientes difieran en menos de un 20% es preciso utilizar las dos líneas gruesas paralelas oblicuas; el papel de éstas es idéntico al de las verticales. Conociendo tres cualesquiera de los datos podemos hallar el cuarto. Por ejemplo, dadas las densidades de los dos ingredientes, y la densidad de la mezcla, el nomograma da sin dificultad los porcentajes de los ingredientes. (¿Cómo?)

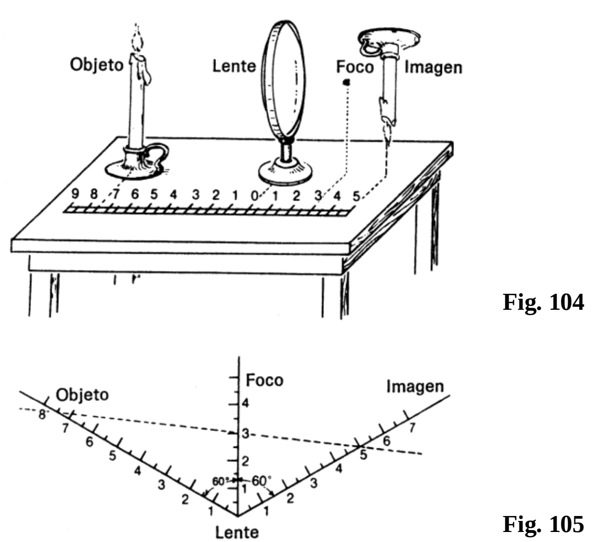


Fig. 104

Fig. 105

Se conocen nomogramas aún más sencillos. Entre ellos tenemos el nomograma de la lente. Según una ley óptica, las distancias *f*, *g* y *h* del objeto, la imagen, y el foco al plano de la lente, están relacionadas por la fórmula $1/f+1/g = 1/h$. Así, trazando una línea recta a través de dos de estos números, en el nomograma **(105)**, podemos hallar el tercero. Aquí, por ejemplo, el

objeto se encuentra a la distancia de 7,5 cm de la lente; el foco, a 3 cm. Por consiguiente, la imagen se encontrará a 5 cm, detrás de la lente. Podemos utilizar este mismo nomograma en el problema de hallar el tiempo h necesario para que dos hombres realicen conjuntamente una tarea, en la que, trabajando individualmente, tardarían, f y g horas respectivamente. (Si un hombre tarda 5 horas en cargar un carro de carbón, y su aprendiz tarda 7,5 horas en llevar a cabo igual tarea, conjuntamente la realizarán en tres horas.)

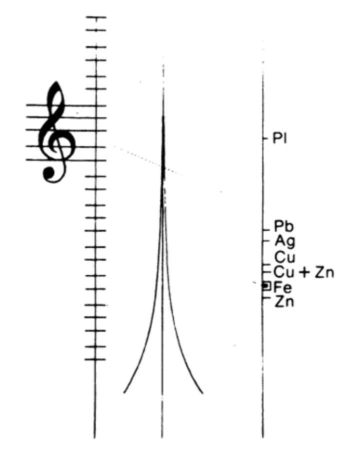


Fig. 106

Es posible trazar nomogramas sin proveerlos de escalas de números. Fijémonos, por ejemplo, en que la escala musical es una escala logarítmica, es decir, semejante a las de la regla de cálculo **(101).** Dado que el número de vibraciones queda multiplicado por un factor constante al pasar de cada tono al de altura siguiente, podemos construir el nomograma **(106)**, que permite leer el radio de un alambre de 1 m. de longitud, tensado por un peso de 100 kg, conocidos el material y el tono con que vibra. La construcción del nomograma se funda en la fórmula de Mersenne

$$n = \frac{1}{2Lr}\sqrt{\frac{P}{d\pi}}$$

(n, número de vibraciones por segundo; L, longitud en metros; P, fuerza tensional en kilogramos; r, radio de la sección, en milímetros; y d, densidad del material en gramos por centímetro cúbico, π = 3,14159...). Algunos de los espacios comprendidos entre las líneas del pentagrama son más anchos que otros. (¿Por qué?)

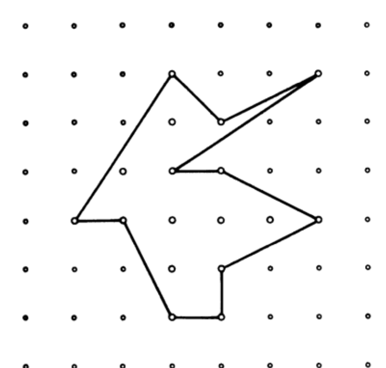


Fig. 107

El polígono dibujado sobre el retículo de puntos de coordenadas enteras **(107)** sirve de ilustración del teorema siguiente: el área de cualquier polígono cuyos vértices sean puntos del retículo es igual al número de puntos del retículo situados en el interior del polígono, más la mitad del número de puntos reticulares ubicados sobre su contorno, menos 1. Por ejemplo, en el caso actual, el área es

$$6 + \frac{11}{2} - 1 = 10{,}5.$$

Comprobaremos fácilmente que así ocurre en el caso de un rectángulo. Si su base mide m unidades, y su altura n, el área del rectángulo será de mn unidades. Sobre su contorno se encuentran: los 4 vértices, más $2(m–1)$ puntos situados sobre las dos bases, más $2(n–1)$ puntos yacentes sobre los lados verticales. En total, se encuentran en el borde del rectángulo $b = 2m+2n$ puntos del retículo. Los puntos del interior forman $m–1$ columnas y $n–1$ filas. Por lo tanto, en el interior del polígono hay $i = (m–1)(n–1)$ del retículo. Según la regla, el área A debería ser $i+6/2–1$, igual a

$$(m-1)(n-1)+(2m+2n)/2-1 = mn,$$

que es el valor correcto. El paso siguiente consiste en observar que dos polígonos con un lado común pueden combinarse y dar un solo polígono, eliminando ese lado, y que el número $i + b/2-1$ del nuevo polígono es igual a la suma de los números análogos correspondientes a los polígonos componentes. Se deduce que para el triángulo resultante de dividir un rectángulo según su diagonal, el número $i+b/2-1$ correspondiente es igual a la mitad del correspondiente al rectángulo, y, por lo tanto, igual al área del triángulo. Podemos ahora generalizar la fórmula para polígonos cualesquiera, sumando y restando triángulos adecuados, y obtener, finalmente, la regla

$$A = i+b/2-1$$

para todo polígono con vértices en el retículo.

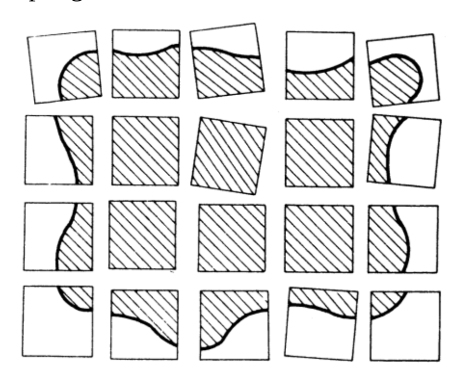


Fig. 108

Cabe utilizar el retículo de puntos enteros incluso para medir áreas de dominios arbitrarios. Siempre es factible desplazar un dominio tal hasta una posición en la que el número de puntos reticulares cubiertos por el dominio sea mayor o igual que el área del dominio. Por ejemplo **(108)**, la superficie sombreada tiene 11 unidades. Situémosla a nuestro capricho sobre el retículo, y cortémosla según sus líneas. La figura completa se descompone en cuadrados.

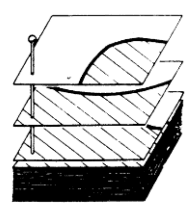


Fig. 109

Apilándolos unos sobre otros **(109)** podremos atravesar la pila con un alfiler, de modo que éste pinche al menos 11 veces las regiones rayadas. Para explicarlo, supongamos que no pudiéramos pinchar las partes rayadas, sino 10 veces como máximo. Entonces, el cuadrado básico estaría cubierto a lo sumo diez veces por las partes rayadas, y el dominio completo tendría un área inferior a 10 unidades, contrariamente a lo que sabemos. Una vez descubierto un punto con la propiedad requerida, volvemos a recomponer la figura **(110)** y vemos en el dominio 11 alfilerazos (o más). Movemos entonces el dominio, desplazándolo de modo que uno de los pinchazos coincida con uno de los puntos del retículo: coincidirán así todos los demás. Nuestro razonamiento también es válido para un área de 10,1 unidades. (¿Por qué?)

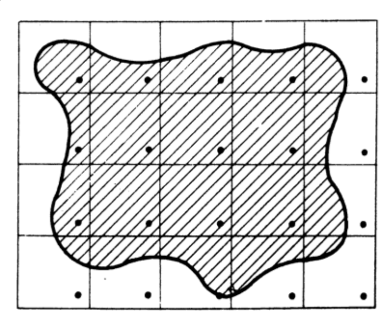


Fig. 110

Si no se requiere una gran exactitud, nos valdremos de un retículo para medir áreas. Por ejemplo, para medir la superficie de la hoja de un vegetal, la recubrimos con una lámina de plástico transparente, punteada como vemos en **(107),** con un paso de malla de 3,16 mm. Contamos los puntos cu-

biertos por la hoja: si hay n de ellos, la superficie de la hoja es de aproximadamente l0*n* mm cuadrados. El método se hace más sutil distribuyendo los puntos como muestra el dibujo **(111).** ¿Qué distancia debería separarlos?

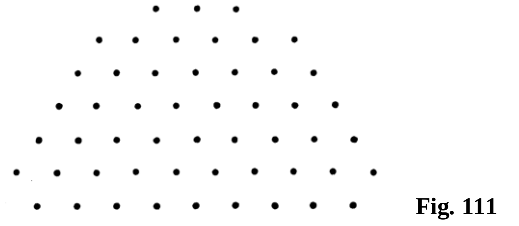


Fig. 111

Tomemos una curva cerrada y convexa, de área 4, que tenga centro, es decir, que exista un punto interior que divida en dos partes iguales a todas las cuerdas que pasen por él. Situemos tal dominio sobre un retículo de enteros **(112),** con la condición de que el centro sea uno de los puntos reticulares. Su posición, por lo demás, es indiferente. El dominio contendrá entonces, necesariamente como mínimo, otros dos puntos más del retículo. Se trata de uno de los descubrimientos de Minkowski en geometría.

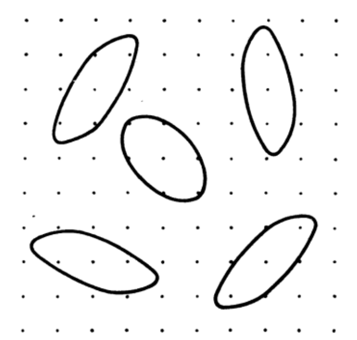


Fig. 112

Nos valdremos de este teorema (cuya demostración no es trivial) para estimar hasta dónde alcanzaremos a ver si nos situamos en el interior de una formación de jalones. Supondremos que miramos desde un punto previamente ocupado por uno de los jalones, que hemos retirado para poder situar el punto de vista exactamente en uno de los puntos del retículo. Las proyec-

ciones de los jalones son circulitos de radio r **(113)**. La línea visual se prolongará hasta que llegue a estar a menos de r de uno de los puntos del retículo. Tracemos una línea recta que pase por nuestro punto de observación, prolongándola, en ambos sentidos, hasta una distancia $1/r$, y consideremos este segmento como mediana de un rectángulo de base $2r$. El área de éste es 4, y su centro, uno de los puntos del retículo, según el teorema de Minkowski, al menos dos puntos del retículo yacerán sobre el contorno del triángulo, o en su interior. Consiguientemente, los circulitos que los rodean tocan o cortan la mediana de la tira rectangular, y, por lo tanto, interceptan nuestra mirada. Así, pues, no veremos a distancia mayor que $1/r$. Sí podemos, en cambio, ver hasta casi esa distancia.

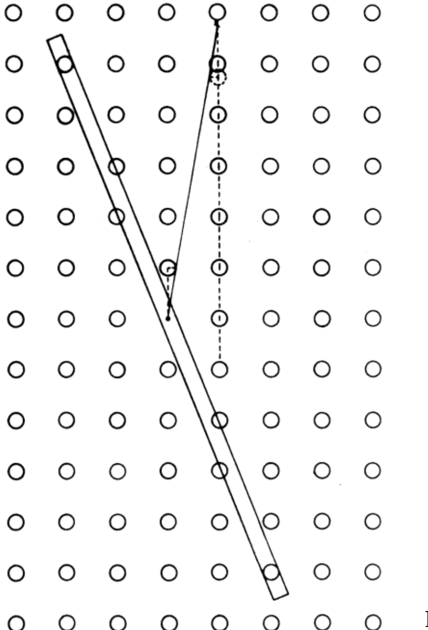


Fig. 113

Para demostrarlo, miremos en una dirección tangente al círculo siguiente de la misma hilera. Prolonguemos la visual hasta la hilera paralela contigua, y calculemos a qué distancia corta a la línea de centros (en trazos)

de esa hilera. Es fácil constatar que el triángulo rectángulo grande es semejante al pequeño.

Tenemos que calcular la hipotenusa h del grande: la semejanza da la proporción $h:1 = 1:r$; y, consiguientemente, $h = 1/r$. Pero no podemos llegar a ver hasta la distancia h, porque en la hilera contigua hay circulitos que interceptan nuestra visual. Desplacemos uno de tales circulitos a lo largo de la línea de centros (en trazos) de la hilera siguiente, hasta que sea tangente a la visual. Tenemos así otro triángulo, congruente con el nuestro pequeño. El lado que este triángulo tiene sobre la visual mide $\sqrt{(1-r^2)}$, cantidad que debe restarse de $1/r$ para determinar el alcance en el caso más desfavorable. Evidentemente, nuestra línea visual ya toca a uno de los circulitos de la primera hilera, pero alterando muy levemente el ángulo podemos evitar este obstáculo, quedando reducida nuestra visual tan sólo en muy escasa medida. Cabe, pues, afirmar que nuestra visual alcanzará ciertos puntos cuya distancia sea casi igual a $1/r-\sqrt{(1-r^2)}$, mientras que no alcanzará ningún punto situado a más de 1/r. Por ejemplo, si los jalones tuvieran un diámetro de 2 cm y estuviesen separados a 20 cm unos de otros, tendríamos, tomando 20 cm como unidad, que $r = 0{,}05$; entonces, $1/r = 20$ unidades = 400 cm, y $1/r-\sqrt{(1-r^2)} = 19{,}0013$ unidades = 380,026 cm. En consecuencia, el punto visible más alejado se encuentra a una distancia comprendida entre 380,026 y 400 cm.

La medición de áreas es más sencilla que la de longitudes. Así sucede porque al dar un contorno con una determinada precisión nos es factible estimar el área limitada por él con un error que se reduce más y más conforme aumenta la exactitud del contorno, y que puede hacerse tan pequeño como se quiera. La situación es muy distinta en lo tocante a longitudes. Dos líneas curvas yacentes muy cerca una de otra pueden tener longitudes considerablemente diferentes. Por ejemplo, la línea en zigzag **(114)**, es alrededor de un 40% más larga que la recta.

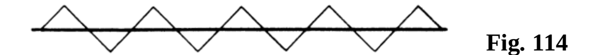


Fig. 114

Existen líneas de longitud infinita, si admitimos la existencia de los objetos correctamente definidos desde el punto de vista matemático, y olvidamos la existencia o inexistencia de modelos materiales. Los matemáticos

necesitan por razones teóricas, tales curvas. Uno de estos problemas teóricos es, por ejemplo, el de trazar una curva que pase por todos los puntos de un cuadrado, entendiendo por tal el conjunto de todos los puntos del interior, más los del contorno. Sierpinski resuelve el problema partiendo de un polígono cerrado **(115),** une, después, cuatro polígonos semejantes **(116),** formando con ellos una cruz, tras de lo cual, une cuatro figuras semejantes a ésta **(117),** y así sucesivamente **(118),** repitiendo **(119)** la construcción.

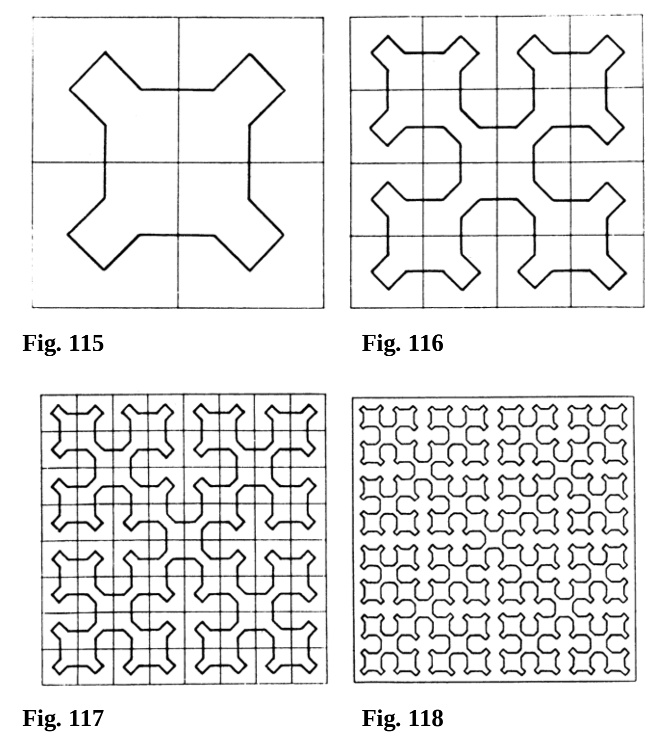


Fig. 115 **Fig. 116**

Fig. 117 **Fig. 118**

El límite de tales aproximaciones es la línea curva que llena el cuadrado: podemos considerarla como trayectoria de un punto móvil, e indicar exactamente, cualquiera que sea el punto que se tome en el cuadrado, en qué instante pasará la curva por él. La curva tiene una longitud infinita, de modo que, en su última fase, final y perfecta, es imposible dibujarla. (¿Por qué?)

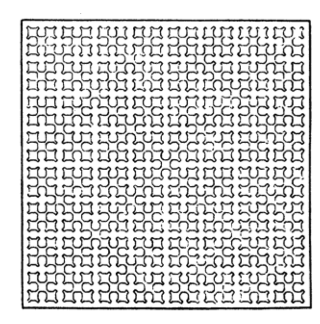


Fig. 119

Si miramos fijamente al dibujo **(119)** vemos líneas oblicuas que tienden a aparecer y a desaparecer. (¿Por qué?)

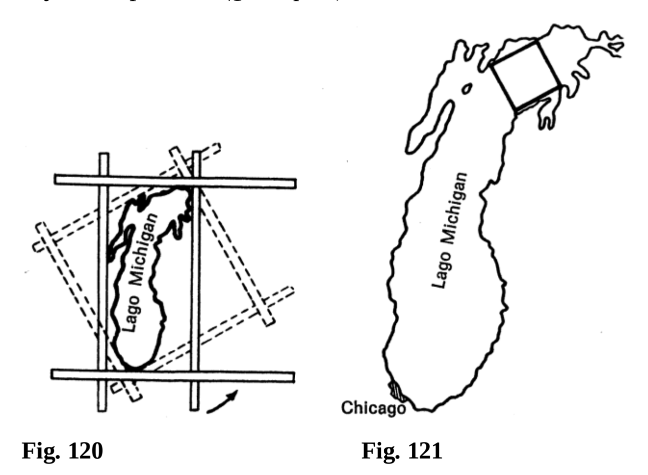


Fig. 120 **Fig. 121**

Dada una curva cerrada cualquiera, como perfil de, por ejemplo, el lago Michigan, podemos circunscribir en torno a ella un cuadrado. Tal hecho es fácil de comprender, ya que podemos circunscribir primero un rectángulo **(120)** tomando un par de tangentes paralelas, y, luego, otro par de tangentes perpendiculares a las primeras; después, vamos haciendo girar el marco entero en torno a la curva fija: tras un giro de 90° los pares de paralelas han cambiado de papel, y si la separación del primer par era inicialmente mayor que la del segundo, al final será menor. Por consiguiente, ha de haber un

momento en el que ambas distancias sean iguales, y en ese preciso momento las tangentes forman un cuadrado.

Vemos **(121)** un cuadrado inscrito en el lago Michigan. La demostración de que en todo contorno cerrado es factible inscribir un cuadrado es difícil.

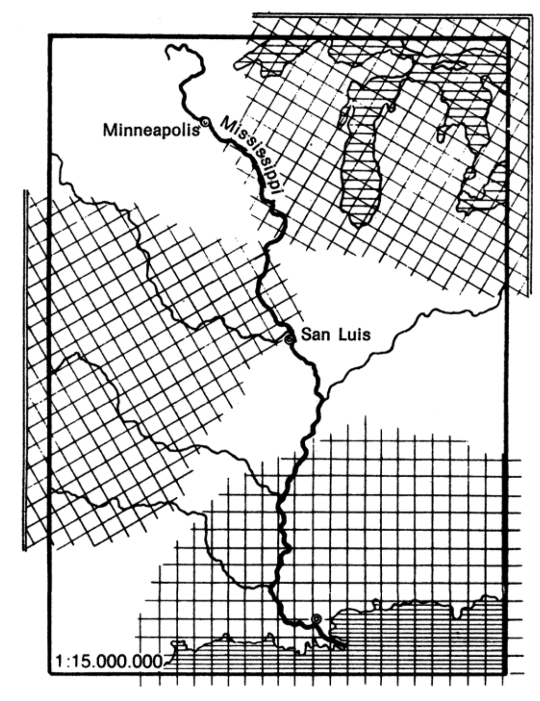


Fig. 122

Para medir longitudes podríamos servirnos de una especie de damero. Sobre una hoja transparente se traza una celosía de líneas rectas que forman cuadrados de 3,82 mm de lado. Una familia de líneas está inclinada 30° con respecto al marco de la hoja. Para medir, pongamos por caso, la longitud del río Mississippi, colocamos el marco de la hoja reticulada sobre el marco del mapa **(122)** y viajamos a lo largo del río, desde su nacimiento hasta el mar, como si la punta del lápiz fuera una torre que se desplazara sobre un tablero de ajedrez **(123)**. Después de contados los pasos, colocamos la plana cuadriculada con una de sus líneas sobre el marco del mapa, y hacemos

como antes; finalmente, procederemos como la primera vez, pero, ahora, con la planilla vuelta del revés. El número total de pasos da la longitud en mm. Dado que el mapa está a escala de 1:15.000.000, tenemos que multiplicar por 15 para tener, en kilómetros, la longitud real del Mississippi.



Fig. 123

Para explicar como funciona este *longímetro,* midamos la longitud de un segmento rectilíneo de *L* milímetros. El número de pasos de la torre a lo largo del segmento es, sencillamente, cuando tomarnos como unidad el lado de los cuadrados, la suma de las proyecciones del segmento en las dos direcciones del retículo. Colocando el longímetro en tres posiciones obtenemos la suma de las proyecciones según seis direcciones diferentes. Es fácil comprender, merced a nuestro dibujo, que estas direcciones forman una estrella, de 30° de abertura entre rayos. Si el segmento formaba inicialmente un ángulo a con una de las líneas del longímetro, los seis ángulos serán

$$\alpha+0°,\ \alpha+30°,\ \alpha+60°,\ \alpha+90°,\ \alpha+120°,\ \alpha+150°$$

y la suma de las proyecciones será

$$L\{\mathrm{sen}(\alpha+0°)+\mathrm{sen}(\alpha+30°)+\mathrm{sen}(\alpha+60°)+\mathrm{sen}(\alpha+90°)$$

$$+\mathrm{sen}(\alpha+120°)+\mathrm{sen}(\alpha+150°)\}.$$

Aunque nosotros no conocemos α, encontramos que la expresión anterior es mínima para $\alpha = 0°$ y máxima para $\alpha = 15°$. Así pues, el valor mínimo es:

$$L(0+1/2+\sqrt{(3/2)}+1+\sqrt{(3/2)}+1/2) = 3{,}732\ L\ ,$$

y el valor máximo es

$$L = \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \right) = 3{,}864L\ .$$

Dado que nuestra unidad mide 3,82, para obtener los resultados en mm, tendremos que dividir por 3,82. Obtenemos ahora $0{,}997L$ y $1{,}011L$ en lugar de L. Así pues, obtenemos la longitud de cada segmento con error comprendido entre –2,3 y 1,1 por ciento. Dado que podemos imaginar toda curva como compuesta de breves segmentos rectilíneos, el error relativo de su longitud, calculada con el longímetro, no rebasará de tales límites, y en muchos rasos será todavía menor. (¿Por qué?)

En algunos mapas, para mostrar la configuración vertical del terreno se trazan también perfiles orográficos. Midiendo su longitud total es posible calcular la inclinación media del distrito. La medición puede hacerse con ayuda del longímetro, contando el número de intersecciones del retículo con las líneas de perfil.

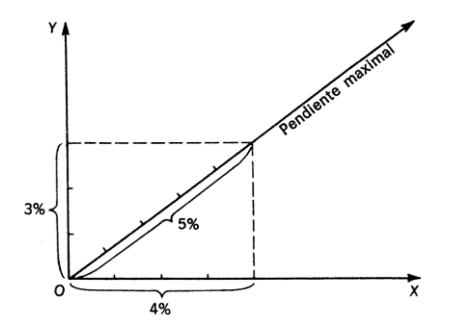


Fig. 124

No es preciso efectuar mediciones complicadas ni difíciles cálculos para hallar la magnitud y dirección de la pendiente máxima de un terreno inclinado (cuestión que tiene importancia práctica, por ejemplo, para el drenaje). Sencillamente, medimos la pendiente según una dirección *OX* cualquiera, y marcamos sobre la línea *OX* del mapa tantos centímetros como unidades de porcentaje de pendiente. Repetimos el trabajo en la dirección *OY*, perpendicular a *OX*. Completamos después el dibujo trazando un rectángulo cuyos lados sean los hallados: su diagonal nos dará la dirección y magnitud de la pendiente máxima. En el ejemplo **(124)**, la pendiente máxima es del 5%.

Todo cuanto necesitamos es una cinta métrica, un listón graduado y un dispositivo con el que apuntar en una dirección, provisto de un nivel de burbuja.

Queda aún pendiente la cuestión de la longitud de una línea dada por la naturaleza, y no por definición matemática. Al medir la longitud de un río nos enfrentamos con el problema de las pequeñas sinuosidades de su curso. Muchos países tienen por fronteras ríos tortuosos o cadenas montañosas. Utilizando mapas cada vez más detallados, e incrementando la precisión de las medidas en el grado correspondiente, lograremos que la longitud sea casi tan grande como uno quiera. Aunque el longímetro es un remedio para tal inconveniente, la precisión del dispositivo está limitada por el tamaño del cuadrado real correspondiente (para un mapa dado) al cuadrado unitario del longímetro. Este tamaño puede ser variable, y sería difícil ofrecer reglas definidas, ya que tales reglas precisarían del uso de escalas diferentes y de longímetros apropiados a cada propósito. Disponemos, no obstante, del método de medición de longitudes por recuento del número n de intersecciones de un conjunto de líneas paralelas con la curva considerada. Si d es la distancia de las líneas y k el número de diferentes posiciones del conjunto, entonces $L = nd\,\pi/2k$ es la longitud aproximada. Hemos de hacer girar la hoja transparente, en la que están trazadas las líneas, un ángulo de 180°/k al pasar de cada posición a la siguiente. Para evitar longitudes paradójicas, como las señaladas, convendremos en prescindir en cada línea de las intersecciones con, la curva, undécima y posteriores. Obtenemos así lo que podríamos llamar L_{10}, o longitud de orden 10. Este concepto ya no incurre en la paradoja de la longitud. Si utilizamos mapas más y más detallados, e incrementamos la precisión de la medida, reduciendo d e incrementando k, manteniendo la restricción de un máximo de 10 intersecciones por línea, los números L calculados según la fórmula anterior irán aproximándose más y más cercanamente a un límite definido: el valor ideal de L_{10}. Del mismo modo, podríamos definir longitudes de cualquier orden: L_1, L_2, ..., L_m, ... Este principio abre una vía para definir reglas de medición independientes de las unidades, sean kilómetros, millas, o yardas. Para comparar las longitudes de las fronteras, podría convenirse en adoptar para todos los países longitudes del orden 12.

Llamemos L'_m a la longitud de la orilla izquierda del Mississippi, L''_m a la longitud de la ribera derecha, ambas del mismo m-ésimo orden. Todavía tendremos la paradoja de que

$$\lim_{m \to \infty} L'_m = \infty\,; \qquad \lim_{m \to \infty} L''_m = \infty$$

No obstante, es razonable suponer que el límite del cociente L'_m/L''_m sea finito. Es posible medir este límite con tanta precisión como se quiera: basta tomar m lo suficientemente grande, y aplicar el método anteriormente descrito. Podemos, por lo tanto, medir la razón de las longitudes de ambas riberas sin determinar las verdaderas longitudes. Dejamos al cuidado del lector la explicación del significado de L_2 para la frontera de una región.

5. Caminos mínimos, ubicación de escuelas, y persecución de barcos

La línea recta es el camino más corto. Un árabe desea regresar a su tienda, pero durante el camino debe dar de comer a su caballo y hacer aguada en un río. ¿Qué debe realizar primero? **(125)**.

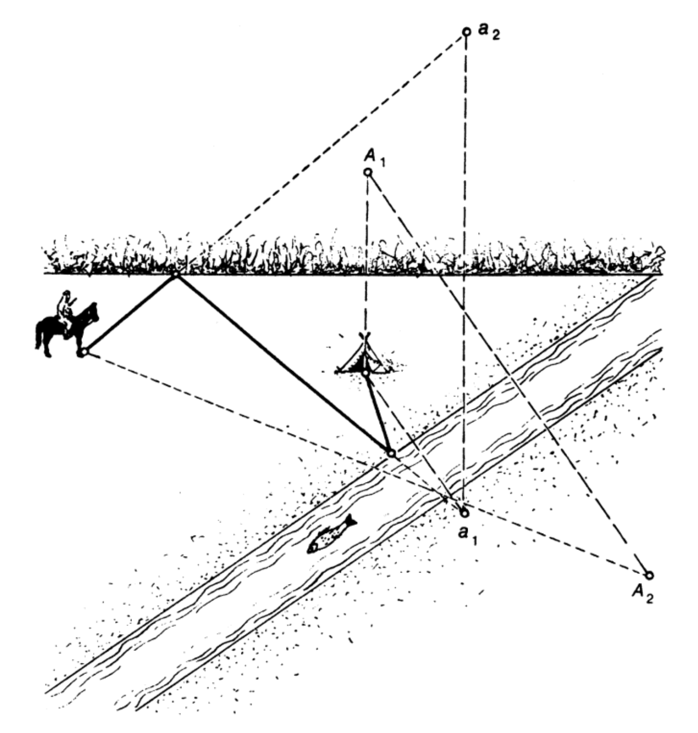


Fig. 125

La tienda, reflejada en la orilla del río, da un punto a_1 mientras que este punto, reflejado a su vez en el borde del pastizal, da a_2. Al invertir el orden

de las dos sucesivas reflexiones obtenemos A_1 y A_2. La línea quebrada negra, de trazo grueso, define el camino más corto, que es igual a la distancia desde el punto a_2 a la posición del árabe. Si quisiera empezar por dar de beber a su montura, el camino sería, tan largo, al menos, como la distancia rectilínea hasta A_2, que es mayor. Por su parte, el árabe no trazó plano ninguno y se limitó a apuntar con su fusil al punto donde se reunían río y pastizal. Viendo que ese punto caía a la izquierda de su tienda, cabalgó en tal dirección. Para explicar su comportamiento, empecemos por fijarnos en que es factible hallar los puntos a_2 y A_2 sin conocer la posición del árabe. Todas las posibles posiciones de éste se clasifican como más cercanas a a_2, más cercanas a A_2, y equidistantes de a_2 y A_2. Estas últimas posiciones, a las que llamaremos neutrales, forman una línea recta: la divisoria. A un árabe que se encuentre ya en la tienda, traer agua del río, dar de comer a su caballo y regresar a la tienda, le es indiferente efectuar primero una u otra cosa: un camino mínimo que vaya desde la tienda al pastizal, después al río, y retorne a la tienda, tienen la misma longitud que el mínimo en el orden inverso: tienda-río-pastizal-tienda.

En consecuencia: si empieza en la tienda, el orden de sucesión es indiferente. Como es obvio, el orden le sería igualmente indiferente a un jinete situado en el punto donde se encuentran el río y el prado. Tenemos, así, *dos* puntos neutros: la intersección del prado y el río, y la tienda. La recta divisoria tiene que pasar por ambos. El árabe, al ver que la intersección queda situada a la izquierda de la línea divisoria, se encuentra también él a la izquierda de la línea divisoria, y, consiguientemente, más cercano a a_2 que a A_2. Dado que los caminos mínimos tienen la misma longitud que sus distancias a a_2 y a A_2, elige el itinerario trazado en nuestro dibujo, cuya longitud es igual que su distancia a a_2. El principio de reflexión aquí utilizado es el mismo que en los problemas de billar.

Un turista se dirige a la villa *V*, desde el punto *T*, remando hacia la orilla a una velocidad de 5 km/h, y continúa después, paseando a través del campo, a 4 km/h. Para llegar a la población en el mínimo tiempo posible, recorre el camino indicado en la figura **(126)**.

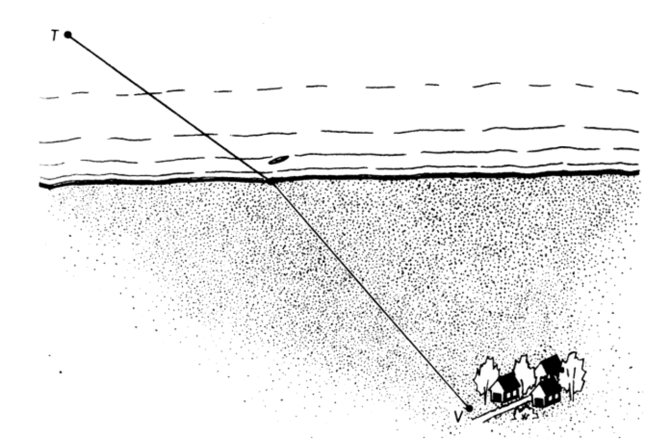


Fig. 126

Tres poblaciones se proponen construir una escuela que sirva a todas ellas. A fin de reducir lo más posible el tiempo que invierten los estudiantes en ir a la escuela, han de buscar la ubicación óptima donde asentarla.

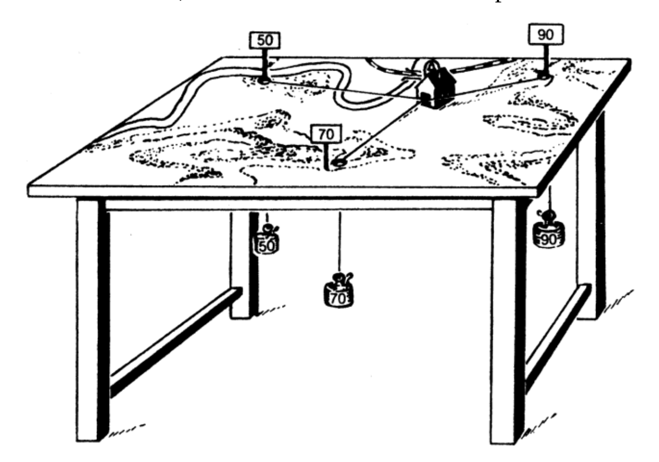


Fig. 127

Supongamos que las poblaciones tengan, por ejemplo, 50, 70 y 90 niños, respectivamente. Extendemos el mapa del distrito sobre una mesa **(127)**, y perforamos en ella sendos orificios en los puntos donde se encuentran los

tres pueblecitos; pasamos otros tantos cordeles a través de ellos; anudamos sus cabos superiores y colgamos de los inferiores sendos pesos de 50, 70 y 90 gramos. El punto de construcción de la escuela deberá ser el punto donde el nudo quede en reposo.

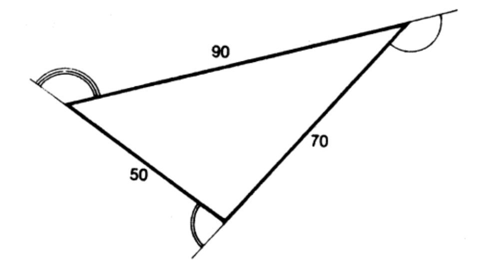


Fig. 128

Pero, en realidad, no es necesario estropear la mesa. Tracemos primero un triángulo **(128)** cuyos lados midan 50, 70, y 90 unidades (unidad que elegiremos a nuestra conveniencia).

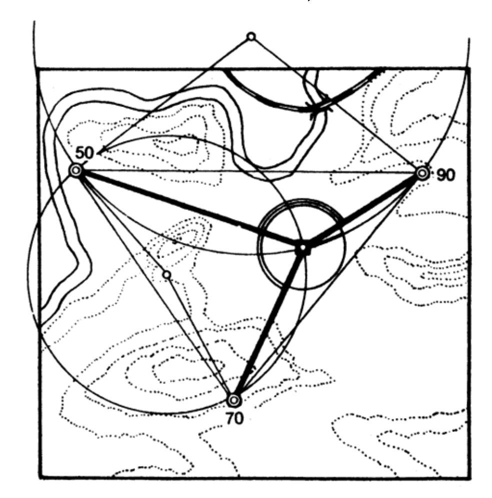


Fig. 129

Lo que nos interesa son los ángulos exteriores de este triángulo auxiliar. Tenemos ahora que encontrar un punto del mapa desde el cual sean visibles los tres núcleos de población según direcciones que formen esos mismos ángulos. Así, por ejemplo, los pueblos 50 y 90 tienen que ser vistos **(129)**

con el mismo ángulo que el ángulo externo limitado por los lados 50 y 90 del triángulo auxiliar. Los puntos del mapa que responden a esta condición se sitúan en un círculo que pasa por los pueblos 50 y 90. El centro de ese círculo se halla fácilmente merced a la proposición de que el ángulo central correspondiente a ambos pueblos es igual al doble del ángulo interior del triángulo auxiliar. Una vez trazado el círculo, procederemos de igual manera con los pueblos 50 y 70 y obtendremos un segundo círculo. La intersección de ambos círculos da la ubicación de la escuela.

En lo tocante al primer artilugio, con pesas y cordeles, resulta, por las leyes de la estática, que el equilibrio del sistema de pesas solamente se da cuando su centro de gravedad se encuentre lo más bajo posible. Si desplazamos el nudo, cambian las longitudes de las cuerdas, y el centro de gravedad sube o baja, ya que su desplazamiento vertical es proporcional a la variación que debajo de la mesa sufra cada trozo de cordel, multiplicada por el peso que pende de éste. Así, el centro de masas se encontrará lo más bajo posible cuando la suma de productos de las longitudes de los trozos de cordel que se encuentran sobre la mesa, multiplicadas por los pesos sujetos a ellas, sea lo más pequeña posible. Ahora bien, esto sucede precisamente cuando la suma de los recorridos a la escuela es mínima, porque esta suma es igual a la suma de los productos de longitudes y pesos (podemos tomar, por ejemplo, 1 decímetro por kilómetro en el plano, y un gramo por niño, la suma, entonces, de productos de longitudes de hilo, multiplicada por los pesos, es igual a la suma de recorridos, en kilómetros).

El procedimiento del tablero, los hilos y las pesas tienen la ventaja de ofrecer siempre una buena solución, incluso cuando uno de los pesos es tan grande que la suma de los otros dos no es suficiente para oponerse a su tirón. En tal caso, el nudo, si es lo bastante grueso, quedará atrapado en uno de los agujeros, y seguirá indicando el correcto emplazamiento. El sistema del triángulo puede fallar, porque no existe triángulo cuando una de las poblaciones tenga más niños que las otras dos juntas. Pero incluso aunque exista, es factible dejar de dar un punto del interior del triángulo de pueblos. (¿Por qué?)

Nos hemos valido de un principio que desempeña en estática un papel importante, a saber: cuando tres fuerzas se equilibran entre sí, es posible trazar un triángulo cuyos lados se correspondan, en direcciones y longitudes, con tales fuerzas. No tenemos más que volver a **(128)** para encontrar

una aplicación donde, sin embargo, hemos retrocedido desde el triángulo hasta las fuerzas. Esta observación nos lleva a las llamadas figuras recíprocas de Cremona. Si tenemos, pongamos por caso, **(130)** diez varillas ligadas entre sí por pasadores en los puntos *A, B, C, D, E, O,* obtenemos 6 regiones: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Tracemos a continuación la figura recíproca, o esquema de fuerzas **(131).** Indicaremos después las regiones por letras, y, los vértices, por números.

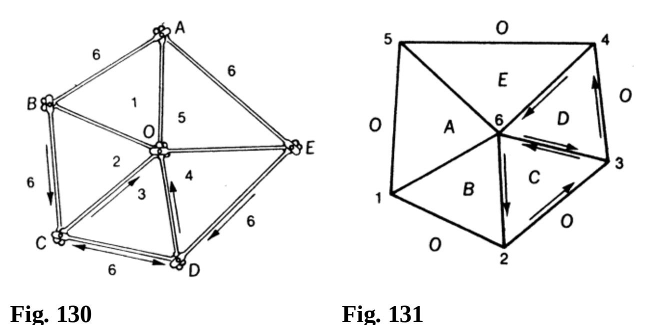


Fig. 130 **Fig. 131**

En **(130)** el vértice C es común a las regiones 2, 3 y 6, y enlaza entre sí las varillas *BC, OC, DC;* en **(131).** La región *C* tiene por vértices los 2, 3, 6 y es contigua a las zonas *B, O, D,* siendo las fronteras *BC, OC, DC* paralelas a las varillas *BC, OC, DC* de **(130).** El esquema completo se construye de modo análogo. Supongamos que en el codo C de las varillas, las fuerzas actúen en las direcciones de las flechas, siendo sus magnitudes iguales a los correspondientes lados del triángulo *C* del esquema, con lo que, entonces, formarán un sistema equilibrado. El principio es válido para cualquier otro codo o punto de unión. Por ejemplo, las fuerzas que actúan en la unión *D* están determinadas por los lados de la región *D*, pero la flecha de la varilla *CD* apunta ahora hacia *D*, porque, por el principio de la igualdad de acción y reacción, la barra que empuja a *C* empuja a *D* con la misma fuerza. Así, habiendo trazado primero las flechas de la región *C* del esquema, hemos de dibujar la flecha 6-3 en la región *D*, de sentido contrario a la flecha 3-6 del área *C*. Dado que las flechas de cada región tienen que formar un circuito, tendremos todas las flechas de *D,* después las de *E,* y así sucesivamente. Por lo tanto, podremos deducir el esquema completo, con tal de que sepamos la longitud de un lado y el sentido de la correspondiente flecha. Se deduce de

aquí que conocida una de las tensiones de la construcción **(130)** es factible hallar todas las demás. Si esta tensión variase, lo único que cambiaría en el esquema sería su tamaño, pero no su forma. En consecuencia, vemos, por ejemplo, que la varilla *OE* está siempre sometida a una fuerza que es 25/16 de la que experimenta la barra *BC*, y que sufre tracción cuando *BC* experimenta compresión. (¿Por qué?) Cuando buscábamos la ubicación de la escuela, comenzamos con el esquema de fuerzas y hallamos, después, la forma del sistema de barras enlazadas en equilibrio (los hilos hacían el papel de nuestras barras.)

El dibujo **(132)** muestra tan sólo la mitad de un puente: vemos el arco propio (cinturón superior), el tablero (cinturón inferior), y la celosía hexagonal que los conecta. Dicha celosía consta de 38 barras idénticas en todos los aspectos y que forman una red de 16 mallas. Cinco de ellas son hexágonos regulares, y las de los bordes son hexágonos truncados. Ahora bien, las barras que los limitan no difieren de las otras. Lo que realmente importa es que las barras están conectadas mediante horquillas y pasadores, y que tienen libertad para girar en torno a los nudos de enlace, capacidad que también poseen las 13 juntas terminales. Podemos, así, considerarlas como agujeros perforados en el cinturón para dejar libres a los travesaños de girar en torno al agujero.

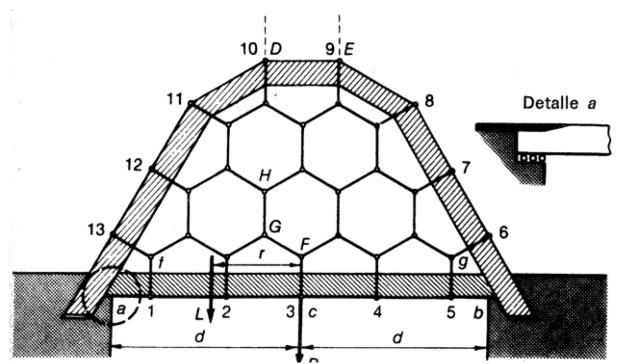


Fig. 132

A pesar de estas libertades individuales, la celosía de 38 barras se comporta como un sistema rígido. Para demostrarlo, observemos que toda deformación de un hexágono regular que mantenga invariables las longitudes de los lados hará disminuir su área. Se deduce, pues, que toda deformación

de la celosía generará un área total más pequeña que la definida por el dibujo. Ahora bien, el área total encerrada por los arcos no puede variar. Esta contradicción muestra la estabilidad de la construcción. Dicha estabilidad implica una igualdad de esfuerzos en todas las barras. ¿Qué sucederá si en un punto arbitrario del tablero inferior *a*-*b* se sitúa un peso *P*? La respuesta es simple: los esfuerzos de todas las barras aumentan en la misma magnitud, haciendo así que tales esfuerzos sigan todavía siendo iguales. Por ejemplo, si colgamos un peso *P* de la cuerda *CB*, los esfuerzos experimentados por todas las barras aumentan en *P*/5.

La ventaja de tal puente es que dispone de una celosía de riostras idénticas, en las cuales las tensiones son siempre mutuamente iguales.

Una cuestión análoga a la del emplazamiento de una escuela **(127)** es la de la ubicación de una central telefónica, que es preciso elegir de modo tal que utilice una longitud mínima de líneas de conexión.

A veces, la determinación del camino mínimo es muy difícil. Supongamos que un campamento militar conste de varias tiendas. Su comandante desea elegir para sí una tienda tal que, partiendo de, ella, le sea posible pasar por todas en un mínimo de tiempo. Si el número de tiendas fuera pequeño, podríamos resolver la cuestión examinando todas las posibilidades, pero si tal número fuera de 50 tiendas, el método exigiría miles de años de trabajo. ¡Invitamos al lector a ayudar a los profesionales!...

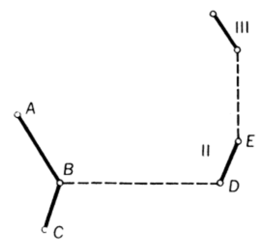


Fig. 133

Propongamos una cuestión más sencilla: las tiendas han de estar unidas por senderos, de modo que sea posible pasar de una a otra. Hemos de lograr que la longitud total de los senderos sea la menor posible. Además, excepto en las tiendas, las sendas no deben cruzarse unas a otras. Para resolver este problema procederemos del modo siguiente: elegiremos una tienda cualquiera, la *A*, por ejemplo, y la uniremos con la tienda más cercana —en

nuestro dibujo **(133)** será la tienda *B*— y uniremos ésta con la *C*, que es la más cercana a *B*. Llegados a *C*, no proseguimos, por ser de nuevo *B* la tienda más cercana a *C*. Por lo tanto, empezamos de nuevo con la tienda *D*. La más cercana a *D* es la tienda *E*. Ahí se detiene nuestro trazado. Volvemos a elegir una nueva tienda, y seguimos de igual modo hasta agotarlas. Para pasar desde la tienda *A* hasta la *D* hemos de conectar unos con otros los «grupos de tiendas». Para conectar el grupo I con el II trazaremos la línea de puntos, que corresponde a la mínima distancia entre el grupo I y el II. El grupo más cercano al II es el III, así que los uniremos igualmente mediante una línea de puntos. Prosiguiendo de igual modo se obtiene un sistema de líneas de conexión, similar a una red de ferrocarriles que conectase varias ciudades.

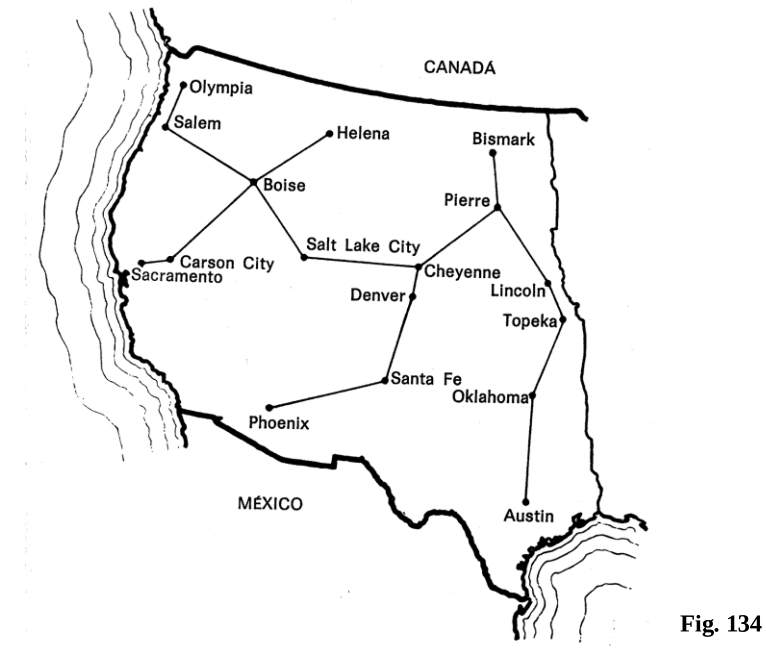


Fig. 134

A este sistema de líneas de enlace lo denominaremos *dendrita*. La dendrita aquí dibujada para ciudades **(134)** tiene solamente un limitado interés:

un mapa ordinario, ya nos informa, no sólo de las distancias entre las ciudades conectadas, sino también acerca de todas las distancias entre ellas. El trazado de líneas es, pues, superfluo.

Sin embargo, sí puede deducirse de la dendrita de las ciudades una información valiosa. Por ejemplo, si se quisiera conectar por ferrocarril todas las ciudades más importantes, con un tendido lo más corto posible, evitando crear nudos de comunicaciones fuera de las ciudades, la dendrita que vemos en el dibujo **(134)** resolvería el problema.

Las cosas son bastante distintas en el caso de los objetos que ahora trataremos: no están situados, como las ciudades, en un plano, sino en un espacio de muchas dimensiones (o características). Al producir una dendrita, procedemos como un botánico que deja secar una flor, que es un objeto tridimensional, en un herbario plano, respetando sólo las distancias más importantes entre las partes concretas de la planta, lo mismo que hace la dendrita.

Es posible hablar de dendritas siempre que intervengan objetos y distancias, ya que no tienen por qué ser necesariamente puntos de un plano. A título de ejemplo, elijamos 28 lugares de los bosques de los montes Beskid, en Silesia, e investiguemos la aparición de ciertas especies de musgos, por ejemplo, los llamados hepáticas, o empeines (Hepaticae). En los montes Beskid se hallan 31 especies diferentes de estos musgos. Los botánicos tienen una escala de frecuencias de aparición de las plantas, v.g., 0, 1, 2, 3, 4. Por ejemplo, en la ladera occidental de un monte llamado Smerokowiec se presenta la *Alicularia scalaris* con una frecuencia 1, la *Cephalozia bicuspidata*, con frecuencia 2, y la *Cephalozia connivens* con frecuencia 0. Así, a Smerokowiec le corresponden los números 1, 2, 0. Hay 31 números, correspondientes al número de especies de hepáticas. En Wielki Stocek los números son 0, 1, 0... Las diferencias entre los números de Wielki Stocek y Smerokowiec son 1, 1, 0,... Obtenemos esta serie restando los números menores de los mayores. Así resultan 31 diferencias. Puede interpretarse que la suma de estas diferencias define la distancia que separa Stocek de Smerokowiec. No se trata ahora de una distancia ordinaria, sino de una distancia entre bosques, medida por hepáticas. Cuanto mayor la semejanza de las flores musgosas de los dos bosques, tanto menor la distancia botánica entre ambas.

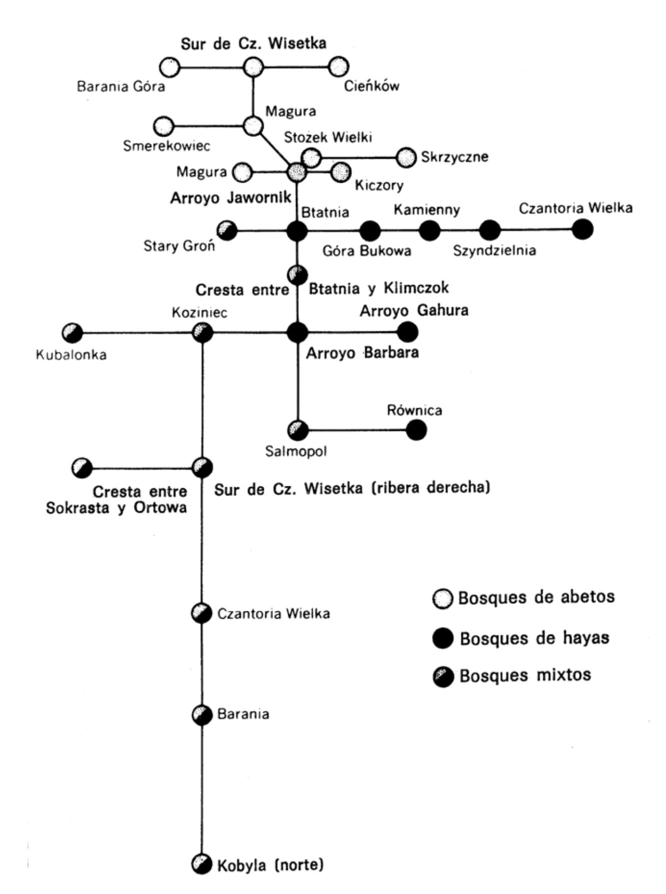


Fig. 135

Podemos ahora trazar la dendrita minimalista. Consta de 27 distancias, que podemos leer en nuestro dibujo **(135)**. No es posible trazar esta dendrita sobre un mapa ordinario, porque las distancias botánicas no tienen nada en común con las distancias corrientes entre lugares. Vemos en la figura circulitos que representan los bosques concretos: los círculos negros representan hayedos; los puntillados, abetos; y los semicírculos, bosques mixtos. Vale

la pena ahora fijarse en que, por lo general, en la dendrita no están entremezclados bosques de diferentes signos convencionales. Tenemos aquí una prueba de que la flora hepática se relaciona con el tipo de bosque. Por lo tanto, a partir del tipo de flora de hepáticas que contiene un bosque se podrían determinar las especies que éste contiene. Merece la pena destacar que la inferencia recíproca, partiendo del tipo de bosque para determinar la flora de hepáticas, no es válida.

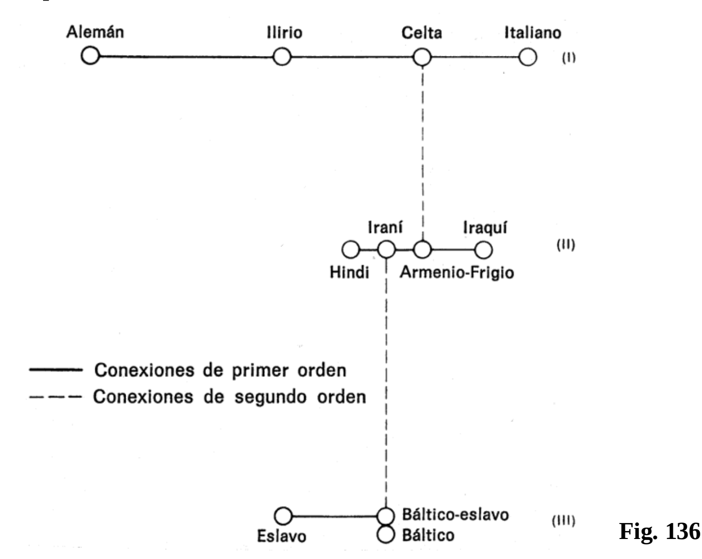


Fig. 136

Cabe utilizar también el método en la lingüística comparada. El gráfico **(136)** se origina del modo siguiente: consideramos como puntos 11 grupos de idiomas. Definimos las distancias entre ellos fijándonos, sencillamente, en el número de características en que difieren ambos grupos de idiomas. Las características aquí utilizadas fueron tomadas de una obra de lingüística. Se ve fácilmente que la dendrita divide los idiomas en las cuatro clases siguientes: (I) noroccidentales, (II) meridionales, (III) orientales, y (IV) nororientales. Esto evidencia la proximidad lingüística de las naciones de hábitats geográficamente próximos. Este método se utiliza también para clasificar cráneos humanos **(137),** motores de aviación, y otros muchos objetos.

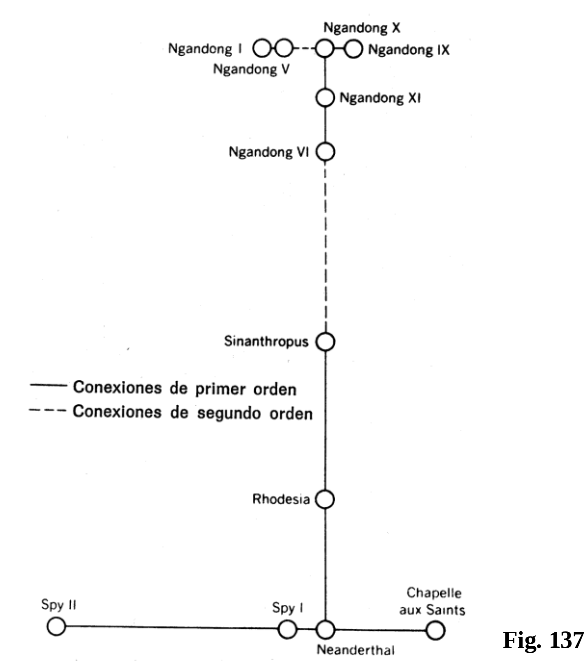


Fig. 137

Se presenta el problema del camino más corto en las cuestiones de persecución. Es evidente que el mejor método de persecución en un plano ilimitado (océano) es tomar un curso que se dirija derechamente hacia el objeto perseguido. Sin embargo, el significado de «mejor método» no es inmediatamente obvio. Por ejemplo, si estuviéramos seguros de que el navío perseguido no sabe que es objeto de nuestra persecución, y que, por lo tanto, hagamos nosotros lo que hagamos va a mantener su rumbo, podríamos hacer algo mejor que dirigirnos hacia él. Si conocemos la razón $V{:}v$ de ambas velocidades, hallaremos un curso rectilíneo que asegure la captura de nuestra prez en el mínimo tiempo posible. Es suficiente hallar todos los puntos que puedan ser simultáneamente alcanzados por ambos barcos partiendo de sus posiciones actuales. El conjunto de todos ellos forma un círculo **(138)** llamado círculo de Apolonio. Si este círculo corta la trayectoria del navío

perseguido, tendremos que poner rumbo directamente hacia el punto de intersección; si no lo corta, será imposible alcanzar al fugitivo.

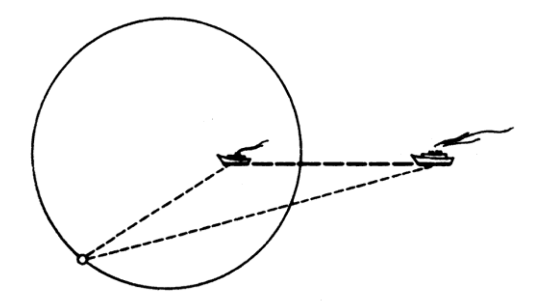


Fig. 138

En este último caso podríamos intentar acercarnos al enemigo tanto cuanto fuera posible. Suponiendo que su velocidad *V* sea mayor que la nuestra *v*, y que su curso forme ángulo recto con la dirección en que por primera vez fue avistado **(139),** la sencilla construcción geométrica que vemos en nuestro dibujo muestra la óptima línea de aproximación. En el instante en que la distancia es mínima, el navío perseguido aparece exactamente a proa. (¿Por qué?)

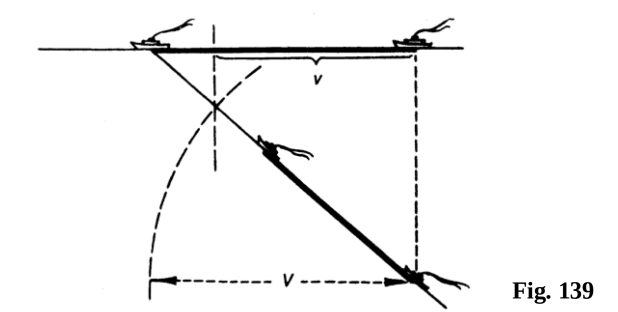


Fig. 139

En el dibujo, esta posición es la correspondiente al navío negro, y la posición inicial, al blanco. Aunque el dibujo **(139)** fuese erróneamente interpretado, atribuyéndosele la velocidad v al barco perseguido, y la *V* al perseguidor (error que es compatible con el dibujo), la construcción seguiría teniendo sentido. (¿Cuál?)

Pero pudiera suceder que el capitán del otro navío se percatase de nuestras intenciones, y cambiase el rumbo. En este caso, los métodos basados en la ignorancia pierden su valor. Para definir el «método óptimo» tendremos que contar, no con las condiciones óptimas, sino con las pésimas, lo mismo que en ajedrez y en otros juegos. Llamemos Blanco al perseguidor, Negro al perseguido, y sean V la velocidad del Blanco, v la del Negro, y supongamos que V sea mayor que v. La eficiencia de un método de persecución se mide por el lapso de tiempo que transcurre desde su comienzo hasta la captura. Cuanto más breve sea el tiempo, mejor será el método. En un océano infinito, cabe que el Negro obedezca a la siguiente regla práctica: sea cual fuere el rumbo del Blanco, el rumbo propio ha de ser el que lo haga alejarse directamente de él. En tal caso, la velocidad relativa del Blanco, es decir, la velocidad con que éste se acerca al Negro, será de $V–v$ o menor, y el tiempo necesario para la captura, $d/(V–v)$ o mayor, siendo d la distancia inicial. Por lo tanto, el Blanco no puede garantizar un tiempo menor que $d/(V–v)$, porque el Negro, usando la regla práctica, disfruta de libertad durante, al menos, ese tiempo, y permanecerá libre durante un tiempo aún mayor si el Blanco no se dirige derechamente hacia él. Por otra parte, el Blanco garantizará la captura del Negro al cabo de un tiempo máximo de $d/(V–v)$. Lo único que tiene que hacer es mantener su proa apuntando siempre hacia el Negro, y avanzar a toda máquina. Todavía es posible que rebaje este tiempo si el Negro no obedece siempre a la regla práctica, o si reduce su velocidad. Ahora sí tenemos derecho a denominar «método óptimo» para el Blanco a la regla de «avante hacia el Negro», así como decir que la regla de «huir directamente del Blanco» es la mejor para el Negro. Si aplica el método óptimo, el Blanco garantiza la captura en un tiempo $d/(V–v)$. Por otra parte, ningún otro método garantizará tiempos menores. El Negro, a su vez, garantizará un tiempo de libertad $d/(V–v)$ si utiliza su método óptimo, ya que ningún otro le garantizaría un tiempo mejor, es decir, más largo. En consecuencia, $d/(V–v)$ es el método óptimo para ambos bandos, y el juego de persecución constituye un juego cerrado. Para comprender en qué sentido se dice que es juego *equilibrado,* basta estipular que si la distancia d se mide en millas náuticas, y las velocidades V *y* v *se* miden en nudos, el Blanco tenga que pagar al Negro la cantidad de $T–d/(V–v)$, siendo T el número de horas transcurridas desde el comienzo de la persecución hasta la captura. Si

esta diferencia es negativa, será el Negro quien haya de pagar. Así concebido, el juego es justo —y como hemos explicado ya— cerrado.

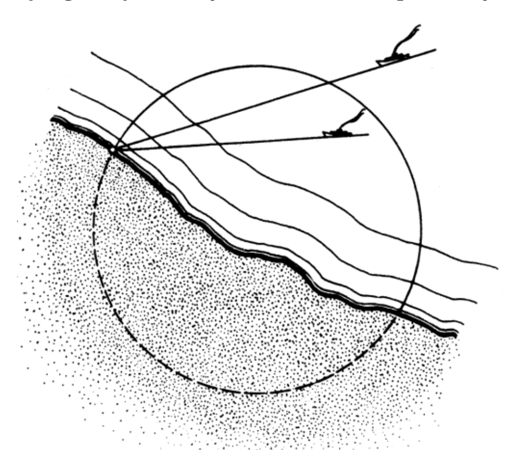


Fig. 140

La persecución se complica si el encuentro se produce en las proximidades de la costa **(140)**. No obstante, si ésta es aproximadamente rectilínea, podremos siempre proceder entendiendo que la antigua orden «de avante al frente» es la orden de avanzar siempre hacia el punto más distante del círculo de Apolonio determinado por los dos barcos. En mar abierto, este punto conserva su antiguo significado, pero cuando el círculo de Apolonio corta a la costa, es preciso borrar el arco trazado a través de tierra firme, y el punto más alejado del círculo se refiere tan sólo a la zona acuática. El círculo se desplaza al mismo tiempo que los barcos, pero en tanto obedezcan a la regla anterior, su curso permanece constante y está dirigido hacia el punto más alejado del círculo de Apolonio —en el nuevo sentido. Es factible que ocurra que este punto caiga en la playa **(140)**. Podemos, en tal caso, decir que los barcos se encuentran en el «entorno» de la orilla. La situación es ventajosa para el perseguidor, pues reduce el tiempo garantizado a menos que $d/(V-v)$ si sabe interpretar la regla general. Si no sabe, y orienta la proa directamente hacia su enemigo, y si éste es lo bastante inteligente como para aplicar la versión perfeccionada de la regla, el punto de Apolonio irá vagabundeando a lo largo de la playa, retardando así la captura. No obstante, el perseguidor tiene siempre garantizado el tiempo $d/(V-v)$. (¿Por qué?)

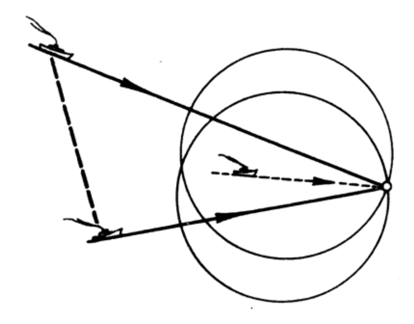


Fig. 141

En el caso de dos barcos que persigan a un tercero, hemos de trazar dos círculos de Apolonio, uno para cada perseguidor. Las posiciones de ambos perseguidores, junto con el más alejado de los puntos de intersección de los círculos, son los vértices de un triángulo. Si el barco que huye se encuentra en el interior **(141)** del triángulo, el mejor método que utilizarán los tres barcos es apuntar hacia el vértice; si el fugitivo se encuentra fuera del triángulo **(142),** el mejor método que tienen los perseguidores es el habitual: dirigirse siempre hacia la prez. En cuanto al fugitivo, éste tiene que calcular el tiempo de captura *d/(V–v),* correspondiente a los dos perseguidores, para decidir cuál de ambos representa más inminente peligro, y huir a toda prisa del barco más peligroso.

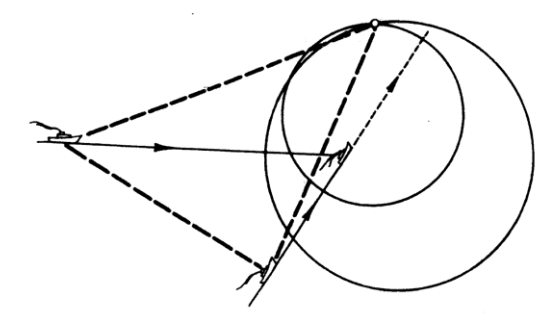


Fig. 142

Es preciso recordar que el triángulo va cambiando, y que el fugitivo es capaz de atravesar sus lados. Esto no ocurre si el fugitivo se encontraba inicialmente en el interior, y los tres barcos se atienen a las reglas. En tal

caso, los tres seguirán cursos fijos (¿Por qué?). El problema de los dos barcos no ha sido resuelto por razonamiento matemático exhaustivo, de modo que queda a cargo del lector la demostración, o refutación, de los resultados anteriores. Se trata de una cuestión interesante, si la definición de «rodear al enemigo» correspondiente a la situación **(141)** es correcta.

Supongamos que un barco persiga a otro, manteniendo siempre un ángulo constante con la línea que conecta ambos barcos, y supongamos que el fugitivo haga lo mismo, dirigiéndose siempre según un ángulo fijo con respecto a la línea que los conecta. Entonces, ambos navegarán a lo largo de curvas que se arrollan sobre sí mismas en torno a un vértice común **(143).**

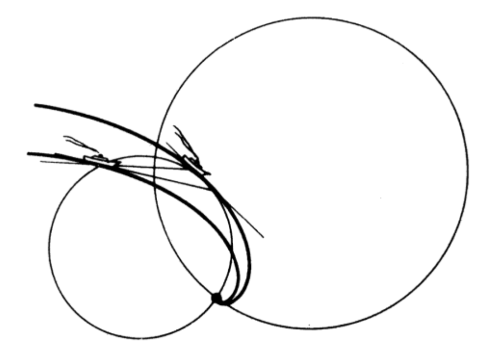


Fig. 143

Para determinar tal vértice, que, como es obvio, constituye el punto de captura, trazamos el círculo de Apolonio correspondiente a la posición inicial de los barcos, y otro círculo que pase a través de estas posiciones y el punto donde concurren sus direcciones. Estos círculos se intersecan en dos puntos; el más alejado corresponde al vértice buscado. Los radios que unen el vértice con los barcos forman con sus direcciones ángulos que son los mismos para ambos barcos. Resulta así por yacer el vértice en el segundo círculo. Las distancias desde los barcos al vértice tienen la razón V:v, por hallarse el vértice en el círculo de Apolonio. Se deduce de todo ello que el triángulo barcos-vértice correspondiente a la posición inicial, y el trazado un poco más tarde con el vértice inicial, son semejantes. En ambas ocasiones, las bases de los triángulos son las rectas que unen los barcos. Dado que éstos avanzan en ángulos fijos con respecto a esta base, es obvio que las situaciones relativas de los barcos y de sus direcciones hacia el vértice son

semejantes en ambos momentos. Puesto que *V* y v son constantes, el nuevo vértice coincidirá con el antiguo. Considerado desde este punto de vista, la distancia angular de los barcos permanecerá constante [Distancia angular que es igual al ángulo formado por las direcciones de los barcos, como podemos ver merced al segundo círculo.], y las trayectorias cortarán bajo un ángulo constante a los radios emanados del vértice, el mismo para ambos. Ahora bien, las curvas que cortan al radio vector bajo ángulo constante tienen nombre: son las *espirales logarítmicas* **(144).** Al hacer girar el libro en torno al vértice de la espiral, ésta parece crecer o decrecer. Dos espirales que tengan con los radios vectores el mismo ángulo constante son congruentes. Así ocurre en el caso de las trayectorias de los barcos en **(143).**

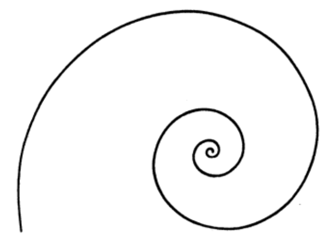


Fig. 144

Supongamos que el capitán del barco perseguidor esté haciendo lo mejor posible, es decir, avanzar derechamente hacia el enemigo, el cual, sin embargo, prefiere el truco del pirata, consistente en seguir siempre el rumbo perpendicular al de su perseguidor. Evidentemente, como ya se ha explicado, ambos buques describirán espirales logarítmicas perpendiculares congruentes. Si la distancia inicial era *d*, y la velocidad del perseguidor es *v*, el tiempo que transcurre desde que comienza la persecución hasta la captura es *d/v*, sea cual sea la velocidad *V* del fugitivo, ya que ésta en nada contribuye a aumentar la distancia mutua. Por lo tanto, la longitud de la espiral, desde su vértice hasta la posición inicial del perseguidor, es *d*. Siendo así en todo momento, la longitud de la espiral del perseguidor, desde su posición actual hasta el vértice, es igual a la distancia de barco a barco. Los barcos subtienden siempre un ángulo recto en el vértice (porque la distancia angular es igual al ángulo formado por las direcciones de los barcos, como podemos ver gracias al segundo círculo). ¿Es posible **(145)** que ambos barcos tracen la misma trayectoria? La respuesta depende tan sólo de la razón *V/v*. Cuando ésta sea de 3.644, ambos barcos describirán la misma trayectoria, y

—esto es lo que parece más sorprendente— el fugitivo, cuya velocidad es mayor, vagabundea en las aguas situadas frente a su perseguidor, y, finalmente, choca con él. La espiral logarítmica obtenida de esta forma tiene la peculiar propiedad de ser evoluta de sí misma. Puede ser descrita por un hilo que se arrolle a sí mismo sobre la misma espiral. Nos basta considerar la línea que une los dos barcos de nuestro dibujo como si fuera un hilo de longitud invariable, con el barco más distante arrollándolo sobre la espiral, mientras navega a lo largo de la voluta siguiente de la misma espiral. El vértice se encuentra siempre a 70°40' de la proa.

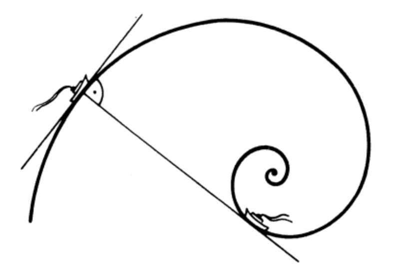


Fig. 145

La lancha de un contrabandista se percata de que a medio camino de la costa hay un guardacostas de patrulla. El guardacostas apaga sus luces, y el contrabandista tiene que elegir el punto más cercano de la costa, donde sus compinches están esperando el alijo. Por ser su lancha tres veces más veloz que el guardacostas, lo podría hacer sin riesgo de ser sorprendido por su invisible oponente. El procedimiento es como sigue **(146)**: si *C* es el círculo de Apolonio correspondiente a *L* (lancha contrabandista) y a *G* (el guardacostas), la lancha puede, sin duda, tomar un rumbo rectilíneo cualquiera que evite el contacto con C. Sin embargo, si opta por seguir el curso de la tangente alcanzará un punto *A* situado en la circunferencia; en ese momento su trayectoria forma un cierto ángulo con la recta *BA.* Continúa entonces navegando con este ángulo con respecto al radio vector del punto fijo ficticio *B*, prosiguiendo a lo largo de la espiral logarítmica hasta detectar justo al frente el punto que desea alcanzar. Avanza entonces en línea recta. De este modo, su ruta está compuesta por dos segmentos rectilíneos y un arco de espiral. Proceder así, sin embargo, es bordear la catástrofe. Para mantenerse siempre a salvo, basta que el contrabandista trace su rumbo exactamente como se ha explicado, pero manteniendo la hipótesis de que su velocidad

es, en realidad, algo menor de la verdadera. Una vez trazado tal rumbo, navega con su verdadera velocidad; la línea de puntos corresponde a la ruta segura. (¿Qué sucede si supone que su velocidad es un 25% menor de la verdadera?)

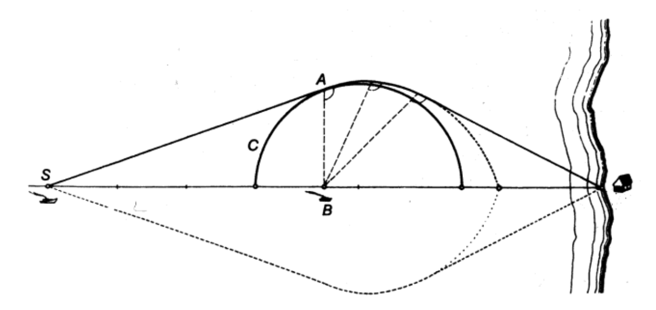


Fig. 146

Un sencillo dispositivo que permite la construcción de espirales logarítmicas consta de una regla que se desliza a lo largo de un clavo; una lámina fina y rígida, que forma siempre el mismo ángulo con la regla, obliga al lápiz a desplazarse **(147).**

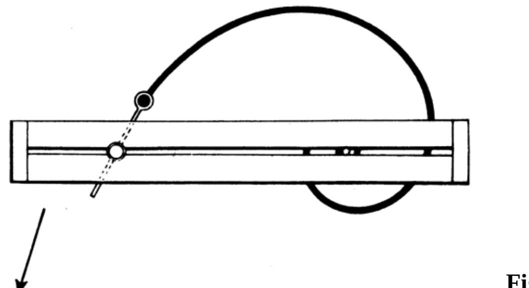


Fig. 147

Cuatro perros, *A, B, C, D,* que forman inicialmente un cuadrado *ABCD,* echan a correr, al mismo tiempo y con la misma velocidad: *A* en dirección a *B; B,* hacia *C; C* hacia *D,* y *D* hacia *A.* Al cabo, terminan por encontrarse en el centro del cuadrado. La trayectoria de cada uno de ellos **(148)** es una espiral del mismo tipo que las de **(144), (145).** La longitud de cada trayecto

es igual a *AB*, como ya se ha demostrado. Las espirales cortan a las diagonales del cuadrado bajo un ángulo de 45°. (¿Por qué?). ¿Qué sucedería si solamente hubiese tres perros que formasen un triángulo equilátero?

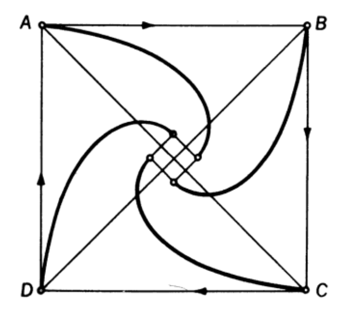


Fig. 148

Se genera una espiral de distinto tipo al desenvolver un hilo de una bobina redonda **(149):** la evoluta de la circunferencia. Imaginemos que un objeto pudiera súbitamente liberarse de las leyes de la gravitación (y de la resistencia del aire): nosotros lo veríamos describir exactamente la misma espiral (¿Por qué?).

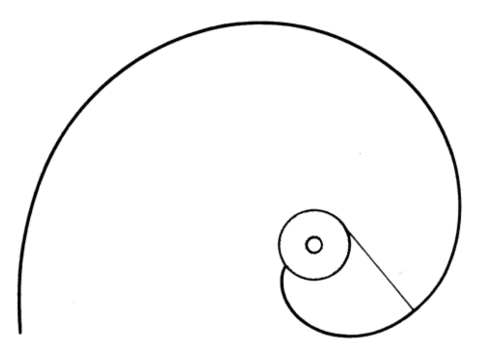


Fig. 149

Supongamos que una hormiga avance con velocidad constante a lo largo de un disco gramofónico que gira a velocidad angular constante: la hormiga describiría otro tipo más de espiral, la llamada espiral de Arquímedes **(150).** En esta última, la longitud del radio vector es proporcional al ángulo que forma ese radio con una dirección fija.

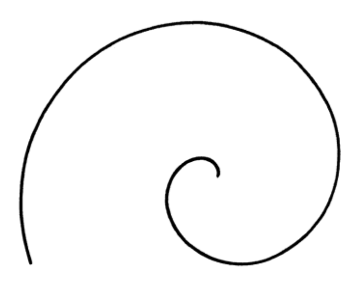


Fig. 150

Un corazón compuesto por dos arcos de una tal espiral **(151),** fijo a la superficie de un disco giratorio, transformaría el movimiento circular uniforme del disco en un movimiento alternativo, uniforme en cada sentido, a la manera de un pistón. (¿Por qué?)

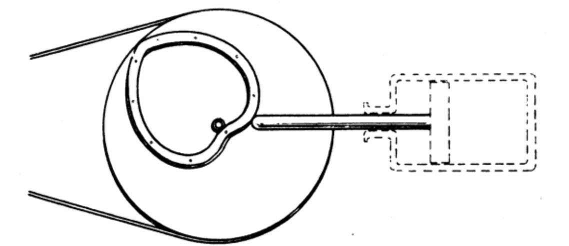


Fig. 151

Al observar las pinas se percibe fácilmente la disposición de sus escamas: también es una espiral **(152)**.

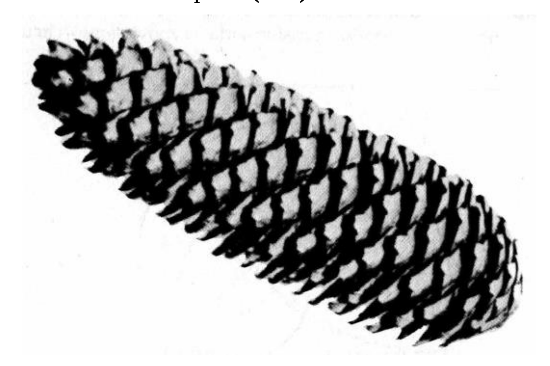


Fig. 152

6. Rectas, círculos, simetrías e ilusiones ópticas

Un polígono compuesto por varillas articuladas nos permite dibujar líneas rectas aunque no dispongamos de regla. El *inversor* **(153)** consta de seis varillas, de las cuales las cuatro más pequeñas son iguales y forman un rombo deformable, mientras que las dos mayores, también iguales entre sí, conectan dos vértices del rombo con el punto fijo F_1. Cuando el otro punto fijo, F_2 es unido al tercer vértice del rombo por medio de la séptima varilla —cuya longitud es igual que la de F_1 F_2— al deformar el rombo, si todas las articulaciones son móviles, el vértice libre describe un segmento rectilíneo.

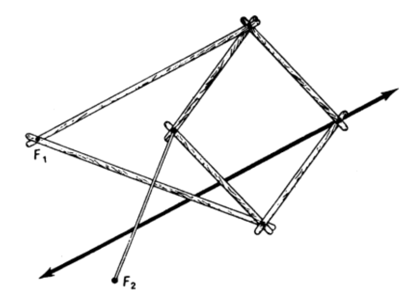


Fig. 153

Para determinar el centroide de un palo, colocamos éste horizontalmente **(154)** sobre los cantos de nuestras manos; después, lentamente, las vamos juntando. Finalmente, **(155)** las manos se unen en el centro de gravedad. El palo nunca pierde el equilibrio, porque cuando el centroide, que inicialmente está situado entre nuestras palmas, se aproxima a una de ellas, la presión sobre la más cercana se hace muchas veces mayor que la presión sobre la otra: el producto de tal presión por el coeficiente de fricción tiene que acabar superando al correspondiente para la otra mano. Cuando así sucede, cesa el movimiento relativo de la primera palma respecto al palo, y se inicia el de la otra. Este juego prosigue alternativamente hasta que ambas palmas llegan a reunirse; el centroide permanece siempre entre ambas palmas, y así

sucede en la fase final. El truco se lleva a cabo automáticamente, sin esfuerzo consciente.

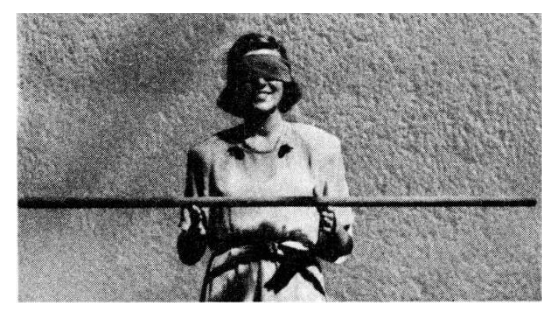


Fig. 154



Fig. 155

Es posible efectuar toda construcción geométrica, para cuyo trazado se utilicen solamente regla y compás, sin ayuda de la regla. Por ejemplo, si deseamos hallar el centro del segmento 1-2 **(156)**, del que solamente se nos dan los extremos, trazamos círculos de radio 1-2 con centro en los puntos 1 y 2, y hallamos su intersección, 3. A continuación, y con el mismo radio, trazamos un círculo con centro en dicho punto, lo que da el punto 4. Con el mismo radio, trazamos todavía otro círculo con centro 4, que pasa por 2 y 3, e intercepta al segundo círculo en 5; a partir de 5, con radio 5-3, y de 1, con radio 1-5, se trazan dos círculos más, que se intersecan en 6 y 7; a partir de estos puntos, y pasando por 5, trazamos sendos círculos, cuya intersección *M* es el punto deseado. La figura tiene 8 círculos. (¿Puede haber menos?)

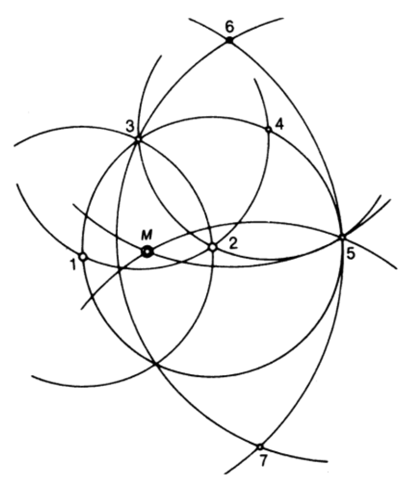


Fig. 156

Dados dos círculos que se corten, hallaremos **(157)** sus centros utilizando solamente una regla. Elegimos un punto a en uno de los círculos; a través de uno de los puntos de intersección de los círculos y del punto a trazamos una línea recta, y hallamos el punto *b.* Seguidamente, retornamos, partiendo de *b,* apoyando la regla en el otro punto de intersección, y determinamos *c*. Partiendo de *A* en lugar de *a,* hallamos de igual manera los puntos *B* y *C.* Ahora unimos mediante líneas de trazos a con *c* y *A* con *C,* y también *A* con a y *C* con *c,* y obtenemos de este modo los puntos *S* y *T.* La línea *ST* (de punto y raya) pasa por el centro del círculo *AaCc;* repitiendo la construcción a partir de otro punto, obtenemos un segundo diámetro y el centro. (¿Cuántas rectas son necesarias?)

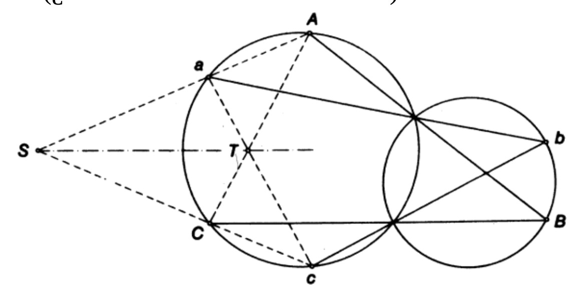


Fig. 157

Con sólo regla y compás es imposible, dado el radio, dar una construcción que proporcione la circunferencia del círculo. La razón de la circunferencia de un círculo a su diámetro es 3,141592653...

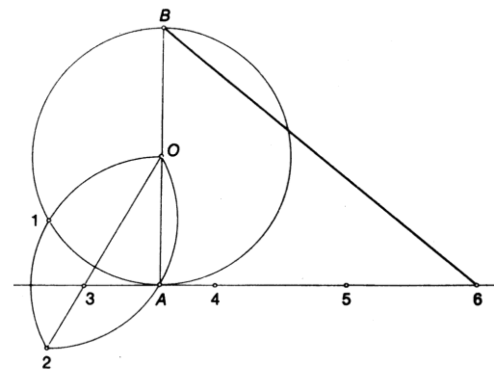


Fig. 158

El Padre Kochánski, jesuita polaco, dio la siguiente construcción **(158)**: Con centro en un punto *A* situado sobre el círculo trazamos otro círculo del mismo radio, y obtenemos 1; a partir de 1 trazamos un círculo que siga teniendo el mismo radio, y obtenemos 2; la recta que une 2 con el centro 0 intercepta a la tangente trazada en *A* en el punto 3. A partir de 3 se miden tres radios sobre la semirrecta de origen 3 que pasa por *A*, y obtenemos el punto 6. El segmento 6-6 es aproximadamente igual a la mitad de la circunferencia. (¿Con cuánta aproximación?)

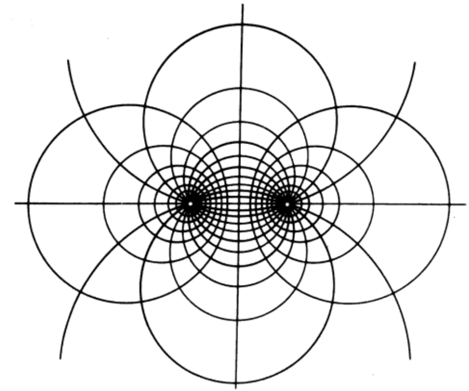


Fig. 159

Trazada la familia de todos los círculos posibles que pasan por dos puntos **(159),** existe una segunda serie de círculos que corta a los anteriores en ángulos rectos. Esta segunda serie es la constituida por los círculos de Apolonio. [cf. **(138)**].



Fig. 160

Dados tres dominios de forma y situación arbitraria **(160),** siempre es posible dividir a los tres en dos partes iguales mediante un solo círculo. Para dividir en dos mitades a dos dominios es suficiente una recta. En el espacio, la correspondiente propiedad se conoce por «teorema del bocadillo»: siempre es posible cortar un bocadillo de un solo tajo plano, de modo que el pan, el jamón y la mantequilla queden divididos en dos raciones iguales.

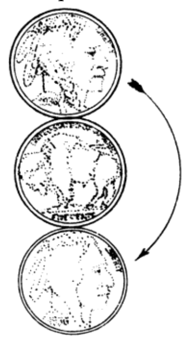


Fig. 161

Si hacemos rodar una moneda sobre otra del mismo tamaño **(161),** el punto de contacto irá corriéndose tanto sobre la moneda móvil (la «ruleta») como sobre la moneda fija. Las circunferencias, como es obvio, son iguales, por lo tanto, si el punto de contacto avanza hasta la mitad de la circunferencia de la moneda fija, habrá avanzado también la mitad de la circunferencia de la moneda móvil. Pero al poner a prueba el razonamiento, vemos que la moneda móvil vuelve a quedar cabeza arriba. (¿Por qué?)

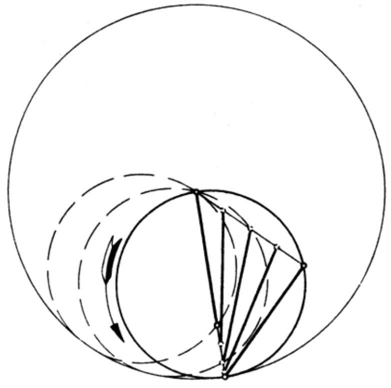


Fig. 162

Copérnico afirma que si el círculo rueda sin deslizar sobre la circunferencia interior de otro círculo cuyo diámetro sea doble del primero, cada punto de la circunferencia del círculo pequeño describe una línea recta **(162)**. Valgámonos de una cerilla para materializar una cuerda en la circunferencia-ruleta, y fijémonos en su movimiento desde el instante en que la cabeza de la cerilla toca al círculo grande hasta que su otro extremo alcance el centro de dicho círculo. La cerilla ha barrido la superficie de un triángulo rectángulo, y sólo toca una vez cada uno de los puntos de esta región. Por consiguiente, todo triángulo puede ser barrido con un movimiento adecuado de una cerilla **(163).**

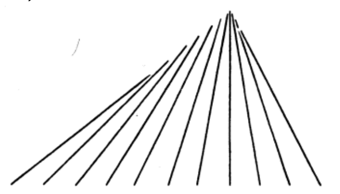


Fig. 163

Recíprocamente, si movemos una cerilla de tal modo que sus dos extremos se desplacen apoyándose siempre en líneas rectas que se corten, su movimiento se obtiene por el sistema copernicano de hacer rodar una moneda dentro de otra de doble tamaño. El centro del círculo grande se encuentra en el punto de intersección de las líneas rectas dadas, y el círculo pequeño está dado por los extremos de la cerilla y el centro del círculo grande. El círculo pequeño pasa por estos tres puntos (y continúa pasando por ellos durante la totalidad de su movimiento) **(164).** Este experimento falla cuando la cerilla llega a tener el tamaño del diámetro del círculo pequeño; en tal caso barre el interior de una astroide.

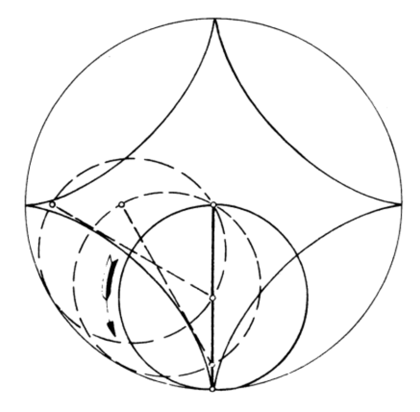


Fig. 165

Cuando una ruleta rueda sin deslizar sobre una línea recta **(165),** un punto marcado sobre su circunferencia (el clavo *P*) describe una *cicloide*. En cada momento, cada punto de la circunferencia se mueve hacia el punto más alto o se aleja de él, siendo el cuadrado de su velocidad tangencial proporcional a la distancia vertical que hay desde el punto móvil al punto más bajo. (¿Cuál es la velocidad del punto en este vértice?)

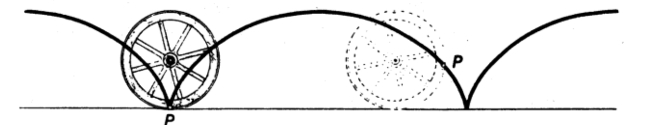


Fig. 165

Imaginemos otro círculo, de tamaño doble que el primero, que ruede con la misma velocidad que el círculo dado, y marquemos un diámetro que, inicialmente, tomaremos vertical. Este diámetro es siempre tangente a la cicloide situada bajo él, y se desliza sobre ella **(166)**.

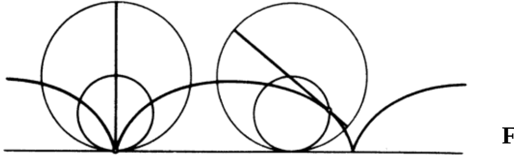


Fig. 166

Fijando el punto más cercano al centro, obtendremos **(167)** una curva sin cúspides (cicloide acortada) y cuando lo fijamos sobre la prolongación del radio, obtenemos **(168)** una curva con bucles (la cicloide elongada). La longitud del arco de cicloide es igual al perímetro del cuadrado circunscrito a la circunferencia ruleta.

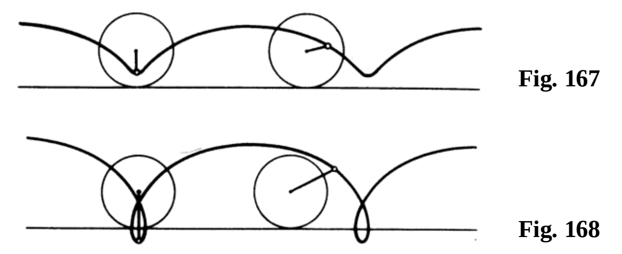


Fig. 167

Fig. 168

Volvamos **(165)** del revés. Entonces, si la cicloide fuera un surco y el punto *P* una bola pesada, descendería por la pendiente con la misma velocidad instantánea que si una circunferencia generatriz invisible viajase con velocidad de rodadura uniforme a lo largo de la pista rectilínea situada sobre ella, con la bola adherida a su circunferencia.

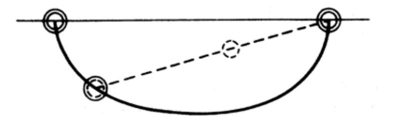


Fig. 169

Una bola que cayese a lo largo de un surco cicloidal **(169)** adelantaría a otra que lo hiciese a lo largo de un plano inclinado, incluso a pesar de que tiene que volverse hacia arriba. En nuestro dibujo vemos un plano inclinado (línea de trazos), que muestra también la posición de la bola sobre el plano. En el momento en que la bola que se desplaza por la cicloide atraviesa el plano. Los cálculos necesarios se simplifican muchísimo por el hecho, observado por Kant, de que puntos que cayeran por distintos planos inclinados, partiendo simultáneamente de un mismo punto **(170)**, se encontrarían en todo momento en formación circular. La bola que cae a lo largo del surco cicloidal alcanza su objetivo más rápidamente que si cayera a lo largo de cualquier otro surco curvado.

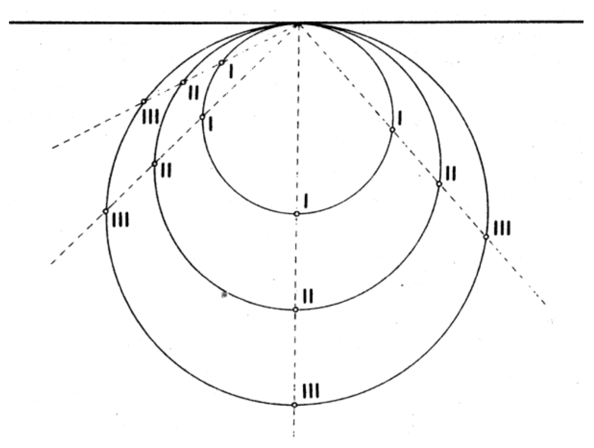


Fig. 170

Entre todas las curvas cerradas de igual perímetro, la circunferencia es la que encierra una mayor superficie. Por consiguiente, el área de un campo encerrado por una curva de longitud total L nunca es mayor que $L^2/4\pi$. (¿Por qué?). El área encerrada por curvas que no sean circulares puede siempre aumentarse sin cambiar su longitud. En el caso de que la curva tenga dos ejes de simetría mutuamente ortogonales **(171)** podemos evidenciar que así es cortando la figura a lo largo de estos ejes y volviendo a juntar convenientemente las cuatro piezas **(172).** El cuadrado central muestra el aumento del área. En el caso de la circunferencia, la nueva figura seguiría siendo la misma.

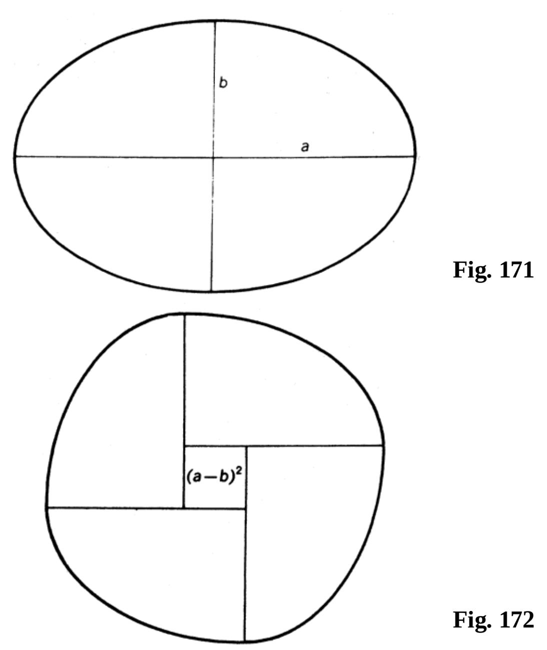


Fig. 171

Fig. 172

Una circunferencia es una curva de anchura constante: podemos hacer rodar un rulo sobre la mesa sin que la mano haya de subir o bajar. Ahora, existen otras figuras de anchura constante. Si trazamos arcos con centros en los vértices de un triángulo equilátero y radio igual al lado, obtenemos **(173)** una curva cerrada de anchura constante. Esta curva es angulosa; si la quisiéramos lisa, bastaría prolongar por igual los lados del triángulo **(174)** y trazar seis arcos de círculo, volviendo a usar los vértices como centros, pero trazando alternativamente los arcos con radio igual al lado prolongado y con radio igual a la prolongación. Cuando se hace rodar una curva como ésta, su punto más alto permanece siempre al mismo nivel. Una curva de anchura constante tiene la misma longitud que cualquier otra de la misma anchura constante; el longímetro dará, como es obvio, la misma medida en ambos casos —lo que podría considerarse que es una demostración. Tal longitud es igual a la anchura multiplicada por π (es decir, por 3,14159...) (¿Por qué?). Ciertas curvas cerradas pueden girar en el interior de un triángulo, y

tocar siempre los tres lados de éste. En el caso de un triángulo equilátero, el área mínima que tiene dicha propiedad es una figura lenticular **(175)** encerrada por dos arcos circulares congruentes cuyo radio sea la altura del triángulo.

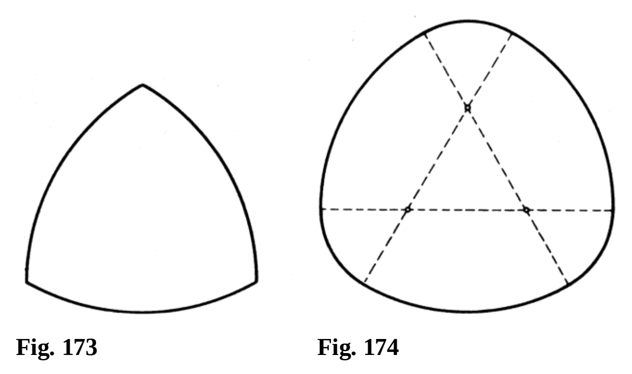


Fig. 173 **Fig. 174**

La figura **(175)** suscita el problema de si habrá una curva convexa, distinta del círculo, capaz de rodar por el interior de un cuadrado. Este problema tiene solución inmediata, dada por **(174).**

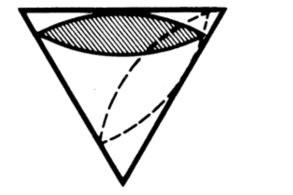


Fig. 175

También guarda relación con esto la posibilidad de que exista una curva convexa, no circular, tal que en su interior se inscriba un triángulo equilátero fijo, y que pueda ser movida de tal modo que los vértices del triángulo invariable describan la curva simultáneamente. Podemos ver tal curva en **(176).** Le podemos considerar como la sección de un cilindro, y el triángulo, como un pistón giratorio. Al compararla con los pistones de los motores alternativos ordinarios, que se desplazan adelante y atrás a lo largo del eje de un cilindro, el pistón giratorio se considera mucho más ventajoso. Gracias a no ser circular la curva **(176),** tal aplicación técnica es posible. (¿Por qué?)

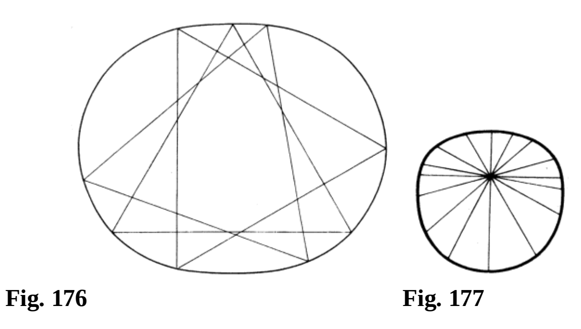


Fig. 176 Fig. 177

Aunque todas las cuerdas de una curva que pasen por un cierto punto sean iguales, no por eso tiene la curva que ser un círculo, como podemos ver por el dibujo **(177)**. Sin embargo, si la curva no contiene ninguna otra cuerda más larga, entonces, necesariamente, es circular.

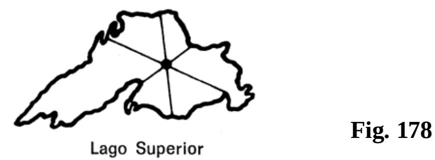


Fig. 178

Trazada una curva convexa arbitraria, hay siempre en su interior una estrella de seis rayos que limitan ángulos de 60° y cuyos rayos opuestos son de igual longitud. Nosotros opinamos que el teorema es cierto para cualquier curva cerrada; vemos aquí una prueba en el caso del lago Superior **(178).**

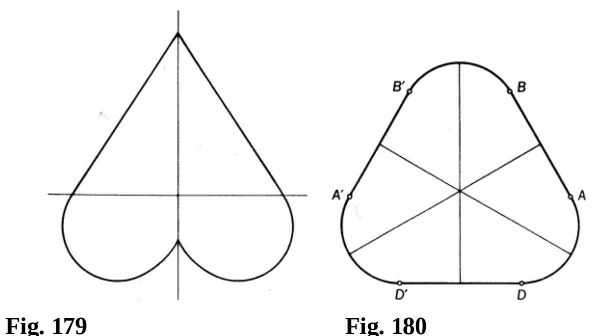


Fig. 179 **Fig. 180**

Un círculo tiene la propiedad de que una varilla de sección circular, de material homogéneo menos denso que el agua, flota inmóvil en el agua, indiferentemente de cómo la hagamos girar en torno al eje. Los contornos, **(179)** y **(180),** que vemos aquí tienen la misma propiedad, si se supone que la densidad del material sea de 1/2 de la densidad del agua. Han sido calculadas de modo que cada cuerda que divida a su perímetro en dos partes iguales, divida también en dos partes iguales su área. Esta propiedad no es peculiar de las curvas con centro como **(180).** Se ve que esta segunda solución del problema de la flotación indiferente tiene tres ejes de simetría, y su contorno contiene tres segmentos rectilíneos.

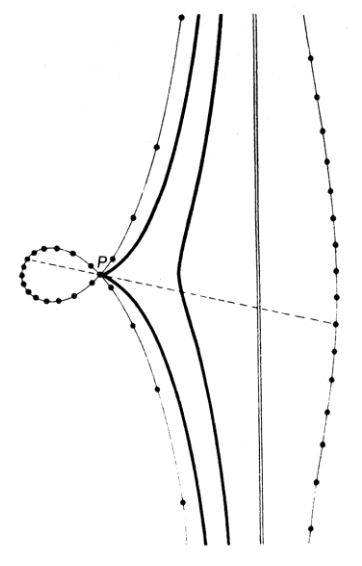


Fig. 181

A unos soldados se les ordenó partir del punto *P* **(181)** y detenerse a 30 pasos detrás de la trinchera. Cada uno de ellos tomó una dirección diferente, y al detenerse formaron una línea arqueada, la llamada *concoide de Nicomedes*. Después se les mandó retornar 60 pasos; luego, 30 pasos más; y, finalmente, otros 30 pasos. De esta manera se formó una segunda línea (la línea gruesa del dibujo), una tercera provista de una cúspide, y una cuarta,

con un bucle. Las líneas con puntos indican dónde se encontraron los soldados tras efectuar la primera y la última maniobras.

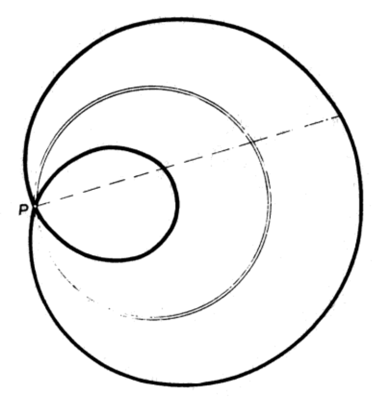


Fig. 182

Un experimento similar, con una trinchera circular, produce el *caracol de Pascal* **(182)**. En este caso, las líneas surgidas tras la primera y la segunda órdenes (ir 30 pasos detrás de la trinchera y 60 de vuelta) forman una única curva lisa, que se corta a sí misma.

Entre todas las curvas, es la circunferencia la más simétrica: tiene un número infinito de ejes de simetría. Un espejo nos producirá un duplicado simétrico de un objeto cualquiera. El espejo es el plano de simetría. Situemos un disco circular en el espacio e imaginemos cuál sería su imagen reflejada en un espejo, y hagamos pasar un plano a través de los centros de los discos real e imaginario, de modo que intercepte en ellos diámetros máximos inclinados hacia el espejo. Uniendo al bies los extremos de estos diámetros **(183)** queda determinado un punto del espejo. Si convertimos este punto en vértice de un cono cuya base sea el círculo real, veremos en el espejo otro cono. Ambos conos pueden ser considerados uno solo, porque las rectas generatrices del cono real dan, al ser prolongadas, las rectas generatrices del cono imaginario. Obtenemos así la construcción de nuestra fotografía: el espejo ha sido eliminado. Sin embargo, la línea recta que une el centro de un disco con el vértice del cono no pasa por el centro del segundo disco, como indica claramente el alambre negro de nuestro modelo. (Es fácil verificar esta afirmación cortando el modelo mediante el plano au-

xiliar antes mencionado, y reduciéndolo así a un hecho evidente de la geometría plana: la figura obtenida consta de tres alambres y dos diámetros, y es visible en nuestra fotografía.) **(183)**.

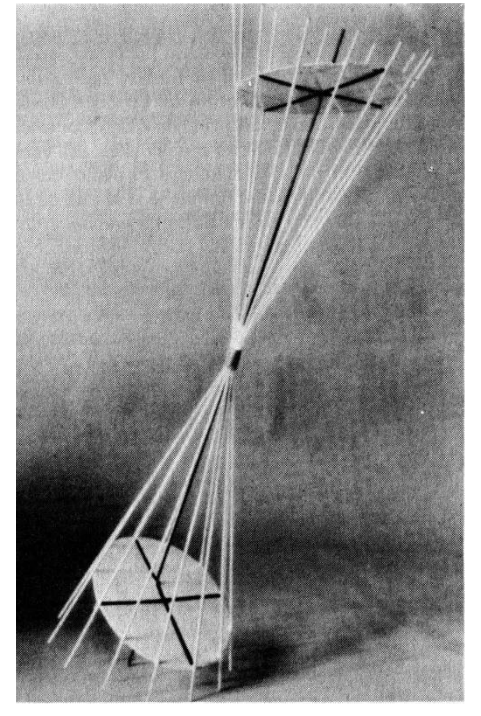


Fig. 183

Este hecho demuestra la imposibilidad de construir el centro del círculo utilizando solamente una regla. Pues si tal construcción fuera posible, también lo sería obtener una segunda construcción, trazándola sobre el plano de un círculo y proyectándola sobre el otro círculo a través del vértice del cono sobre aquél, ejecutada estrictamente de acuerdo con las mismas reglas, porque las intersecciones de líneas rectas se convierten en intersecciones de rectas. Este hecho es igualmente válido para las intersecciones de las líneas rectas con el círculo. Por lo tanto, el centro del primer círculo, por ser una de estas intersecciones, tendría que convertirse en el centro del otro, pero

no es así. Esta demostración de imposibilidad es sumamente característica de las matemáticas.

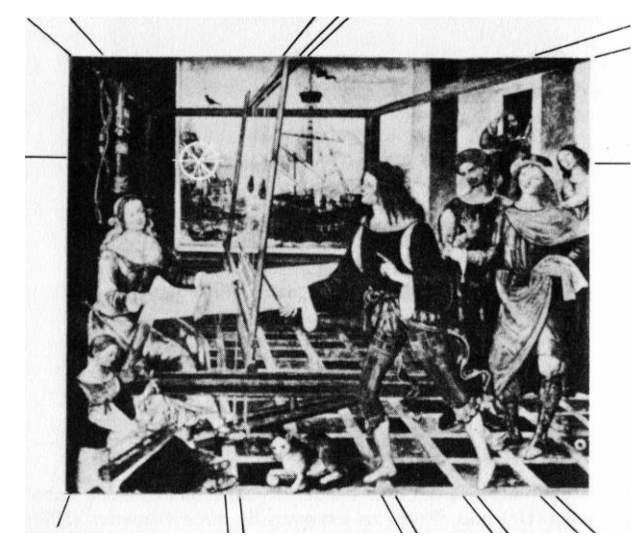


Fig. 184

Para crear imágenes planas de objetos tridimensionales recurrimos a la *perspectiva cónica.* Hoy, la cámara fotográfica la proporciona automáticamente, y los antiguos maestros se valieron de los mismos medios para lograr la impresión de profundidad perspectiva. **(184).** Las paralelas horizontales se encuentran siempre en la «línea del horizonte» de la pintura; si son perpendiculares al fondo, su ápice es el «punto principal» (aquí marcado por un circulito). Únicamente cuando se sitúa el ojo en la perpendicular al cuadro que pasa por el punto principal se obtiene, sin deformación, la impresión visual correspondiente a la realidad tridimensional.

La ilusión de que la mirada de un retrato va siguiendo al espectador que pasa de largo junto a él es fácil de explicar. En el caso de un modelo vivo inmóvil **(185)** la vista cambia al pasar nosotros de largo: primero desaparece una oreja tras la cabeza; después, un ojo comienza a quedar oculto tras la nariz, y así sucesivamente. Tan sólo si el modelo gira la cabeza para mirarnos de frente continuamos nosotros viendo las dos orejas, los dos ojos, etc. Ahora bien, en el caso de un retrato, vemos siempre ambos ojos y orejas,

sea cual sea nuestro punto de vista. De ahí que el retrato nos produzca la impresión de que la persona gira la cabeza para mirarnos.



Fig. 185

En una tarde de verano, el autor vio bailar en un lugar a un enjambre de pequeñas moscas, y como suelen hacer los mosquitos, salir disparadas hacia otro punto situado a pocos metros, para danzar allí por parejas, retornar uno o dos minutos más tarde al primer lugar, y repetir el mismo juego una y otra vez: El juego duró lo bastante como para permitir al observador determinar aproximadamente la velocidad del salto: rondaba los 65 km/h. Al observar atentamente, el autor percibió, en la senda del salto **(186)**, destellitos luminosos que formaban líneas de trazos y que estaban separados aproximadamente 1 cm o 1 cm y medio. Se trataba, evidentemente, del efecto del Sol al incidir de través sobre los insectos, los cuales tan sólo resultaban visibles cuando tenían las alas alzadas e iluminadas por el Sol. Cada rosario de destellos pertenecía a una única mosca, y su pluralidad era nada más que una ilusión resultante de la persistencia de las imágenes en la retina. Ahora, 65 km/h equivalen a unos 18 metros por segundo, es decir, de 1.200 a 1.800 veces la separación de los trazos. Tomemos el valor medio 1.500: resultaría, pues, que la frecuencia del batir de las alas de los insectos rondaría las 1.500 veces por segundo. Concediendo un error de observación del 50%, resumimos la observación en mil o más aleteos por segundo. Resulta curioso que sea factible efectuar tal observación sin instrumentos.

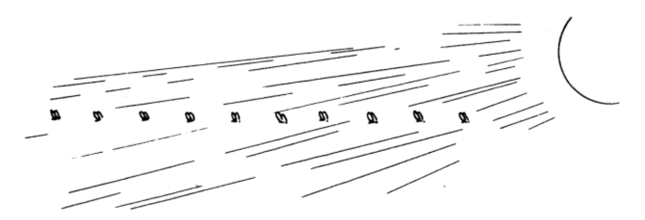


Fig. 186

Para una mosca, un golpe de alas viene a ser lo que un paso para un hombre. Un hombre da dos pasos por segundo, mientras que la mosca aletea 1.600 veces por segundo; es decir, su vida corre 800 veces más rápidamente:

para la mosca, un solo minuto es lo mismo que 12 horas para un hombre. Así, pues, podemos comparar el ciclo anterior con un baile por la mañana y otro por la tarde.

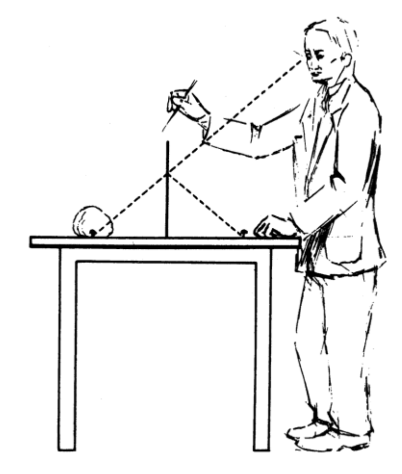


Fig. 187

La noción de simetría conduce al siguiente juego. Sobre una mesa horizontal colocamos un marco vertical en que está encuadrado un cristal plano transparente **(187)**, que divide la mesa en partes derecha e izquierda. En la parte derecha de la mesa atornillamos un tornillo pequeño. Al hacerlo vemos a alguien atornillar otro en la parte izquierda; evidentemente, el cristal actúa a modo de espejo. Colocamos ahora una marca en el lugar exacto de la mesa donde estaba el tornillo ficticio, e insertamos allí un tornillo verdadero. Una vez hecho esto, cubrimos el verdadero tornillo izquierdo con un pegote de arcilla cuyo diámetro sea varias veces mayor que el tornillo. Para un observador que mire desde el lado izquierdo de la mesa, lo único que se ve es la bola de arcilla, mientras que el observador situado en el lado derecho no solo verá la arcilla, sino también el tornillo, como si la arcilla fuera transparente. Ahora, pasando el brazo del otro lado del cristal, el observador toca inmediatamente con su bisturí la cabeza del tornillo, a través de la arcilla. ¡Está viendo el tornillo sin verlo!

Esta idea se puede utilizar para la localización de cuerpos extraños (por ejemplo, fragmentos de metralla incrustados en el cuerpo humano). A tal

fin han venido utilizándose con éxito los rayos X ya desde su descubrimiento, por Roentgen, en 1895. En 1938 se publicó un método que combina dichos rayos con las ventajas del juguete anterior. Para evitar malentendidos, mencionemos que entre 1895 y 1938 se propusieron no menos de 200 métodos, muy eficientes muchos de ellos, pero que presentaban el inconveniente de mantener a paciente y cirujano bajo los rayos X durante toda la operación, a pesar de los riesgos que conlleva una tal exposición permanente.

El dibujo **(188)** muestra la sección transversal vertical de una mesa de operaciones, a la cual se encuentra atado el paciente; la pantalla situada sobre él, y la lámpara de rayos X situada por debajo están rígidamente conectadas mediante una barra paralela a la línea definida por el foco de la lámpara y el punto medio de la pantalla sensible S, que está marcado en ella por una «cruz» de finos trazos. Supongamos que el objetivo de la intervención sea extraer un perdigón (*P*): siempre es posible desplazar la mesa con el paciente hasta situar el perdigón en la recta recién definida, y reconoceremos que así es al ver la sombra del perdigón en el centro de la cruz.

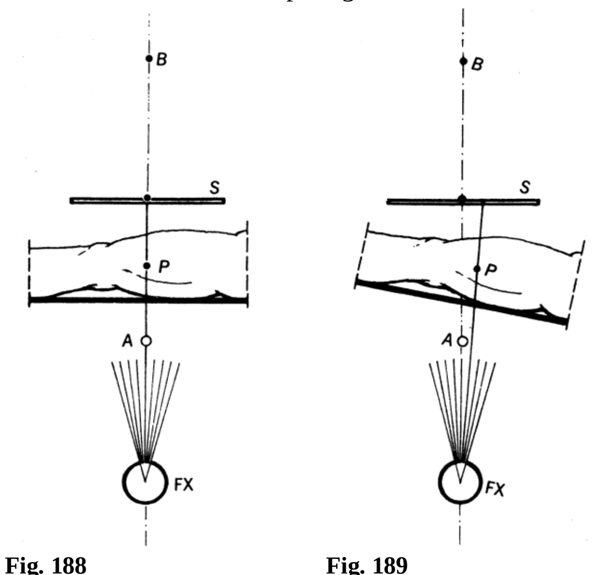


Fig. 188 **Fig. 189**

El paso siguiente consiste en hacer girar la barra en torno al eje horizontal unos 15°. Si, al hacerlo, el perdigón queda desplazado de la cruz, tenemos que restablecer el efecto perdigón-cruz, desplazando hacia arriba o hacia abajo el eje *A* juntamente con el sistema completo; si el giro de *A* no destruye la alineación, no es preciso mover *A*.

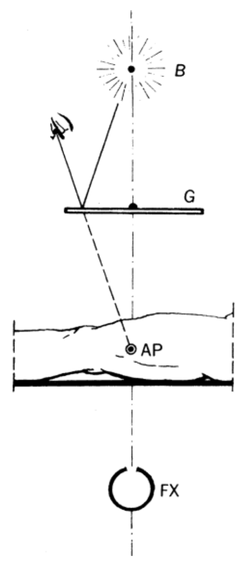


Fig. 190

Una mirada a los dos dibujos **(189)**, **(190)** bastará seguramente para convencer al lector de que el punto brillante *B* (p. e., una pequeña bombilla eléctrica) se encuentra ahora situada simétricamente con respecto al grano *P*, siendo la pantalla el centro de simetría. El último paso estriba en reemplazar la pantalla por un cristal plano *G*. Hecho esto, aplicaremos la idea de nuestro juguete. Cortamos los rayos X y encendemos la luz del quirófano: el cirujano podrá ahora jactarse de poder, si fuera necesario, tocar el perdigón con su bisturí. Una importante ventaja de este método es la ausencia de rayos X durante la intervención, de modo que ni el paciente ni el cirujano se encuentran expuestos a ellos **(191)**.

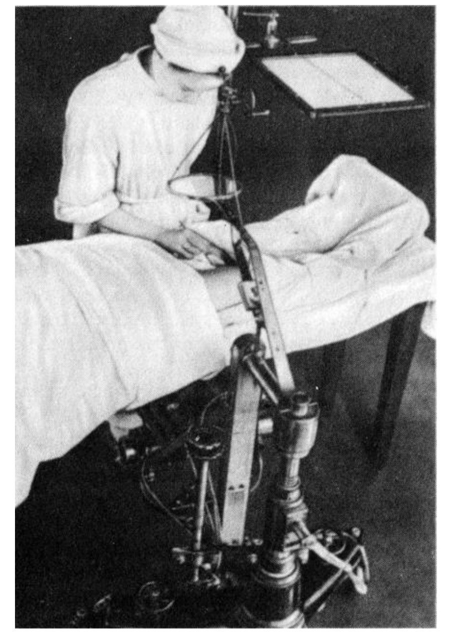


Fig. 191

Recientemente, se ha sometido a consideración una importante mejora. En lugar de la lamparita *B*, tres delgadas varillas S_a, S_b, S_c convergen en *B* formando ángulo de 60°. Estas varillas son de distintos colores, y cada una de ellas porta un diminuto anillo. El cirujano, al mirar a través del cristal **(191),** no sólo ve su ápice en *P* bajo la piel del paciente, sino también tres varillas que parecen atravesar la piel de éste. El cirujano puede entonces desplazar los anillos hasta «verlos» sobre la piel, y marca esos puntos a, *b*, *c* con sus respectivos colores. Hecho esto, ya no es necesario ningún aparato de rayos X. Supongamos que el cirujano se ve obligado a posponer la operación hasta otro día, y a realizarla en otro quirófano que no dispone de equipo de rayos X. Lo hará sin dificultad. Con el paciente inmovilizado en la mesa, el cirujano prepara el cristal e instala el trípode de manera que los anillos a, *b*, *c* queden, al mirar a través del cristal, en yuxtaposición con los respectivos colores pintados sobre la piel del paciente. El cirujano verá así el ápice en *P*. El fundamento matemático de esta propuesta es obvio.

Algunas falacias ópticas presentan un carácter en verdad sorprendente. Cuando vemos una valla de alambre del tipo de **(15)**, ocurre, en ocasiones, que nos engañamos al estimar la distancia a la valla, y fallamos al querer asirla, quedándonos demasiado cortos. Para evocar este fenómeno empezamos por mirar a un punto situado por delante de la valla, y, después, sin cambiar la dirección de la mirada, fijamos nuestra atención en la valla. La explicación estriba en que, por ser similares todos los cuadrados de la valla, no tenemos guía que nos diga cuál de las imágenes del ojo izquierdo se corresponde con una imagen del derecho. Si, por haber cruzado la mirada, tomamos como idénticas dos imágenes de dos cuadrados diferentes, atribuyéndolas a un solo cuadrado, situaremos mentalmente este cuadrado en la intersección de las líneas de visión, lo que hace aparecer a la valla más cerca de lo que realmente está. Es también factible hacer que la valla aparezca más lejana de lo que está, pero es más difícil. (¿Por qué?). El principal factor que posibilita la visión estereoscópica son las diferencias entre las imágenes que de un mismo objeto dan los ojos derecho e izquierdo. Para obtener imágenes que den la impresión estereoscópica, el método de los anáglifos recurre a dibujos adecuados, en perspectiva. Los anáglifos consisten en dos proyecciones del objeto real: una, desde el centro de la pupila izquierda y, otra, desde el centro de la derecha. La primera es roja, y la otra, verde-azulada: al observarlas con unas gafas bicolores (con cristal rojo en el ojo derecho y verde-azulado para el izquierdo) veremos una imagen tridimensional. (¿Por qué?)

Una ilusión óptica muy sencilla falsea nuestra estimación de la distancia de un hilo horizontal que carezca de postes visibles que lo sostengan. La razón se encuentra en la homogeneidad del alambre. Si hubiera en él un punto rojo, dirigiríamos los dos ejes de la mirada sobre el mismo punto, e inmediatamente lograríamos la percepción de la distancia; si no existe ninguna marca característica, basta inclinar la cabeza hacia el hombro (¿por qué?).

7. Cubos, arañas, panales, y ladrillos

La naturaleza produce cubos en la forma de cristales de sal (NaCl) **(192)**: podemos llenar con ellos la totalidad del espacio. Con seis colores pintamos un cubo de 30 modos diferentes, cada cara de un distinto color. Si tenemos 30 de estos modelos, y tomamos uno cualquiera de ellos, hallaremos otros 8 cubos y construiremos, a partir de éstos, otro de doble tamaño, de tal modo que los colores de las caras adyacentes sean iguales, y que la disposición de los colores en el cubo grande sea exactamente la misma que en el pequeño.

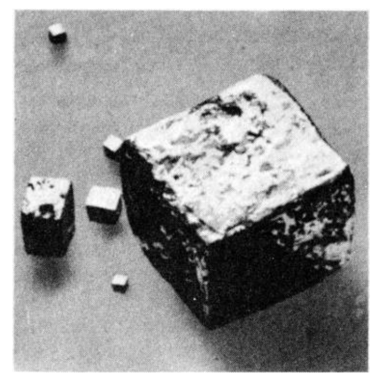


Fig. 192

Con las seis piezas de **(193)** es posible construir un cubo **(194),** proceso que no es, en modo alguno, tarea sencilla. Hay dos soluciones. Si la arista del cubo es de 3 cm, habrá, entre estas piezas, tres compuestas cada una por 5 cubitos, de arista de 1 cm, y otras tres formadas por 4 de tales cubitos. Dos piezas son congruentes por simetría. (¿Sería posible evitarlo?) Colocando las piezas del modo aquí indicado **(195)** obtenemos un precioso diseño arquitectónico **(196).** El número de diferentes diseños que es factible montar es lo bastante grande como para ocupar la vida entera de una persona...

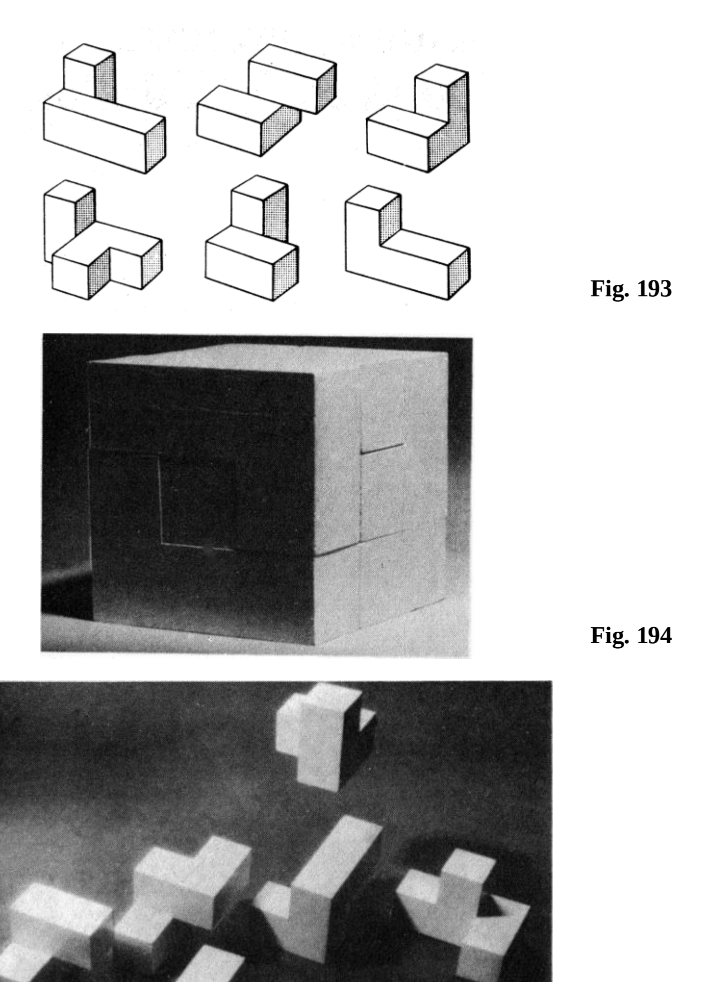


Fig. 193

Fig. 194

Fig. 195

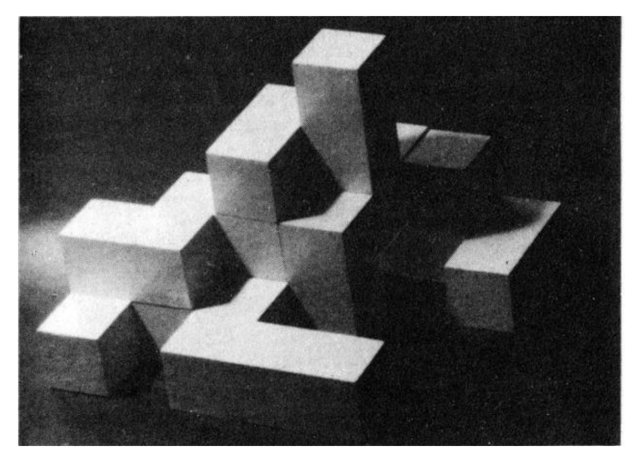


Fig. 196

Al cortar un cubo por un plano que divida perpendicularmente por la mitad a la diagonal mayor, la sección **(197)** producida es un hexágono regular. También vemos un hexágono regular al mirar desde lo alto un cubo, cuya diagonal mayor sea perpendicular al plano de proyección **(198).**

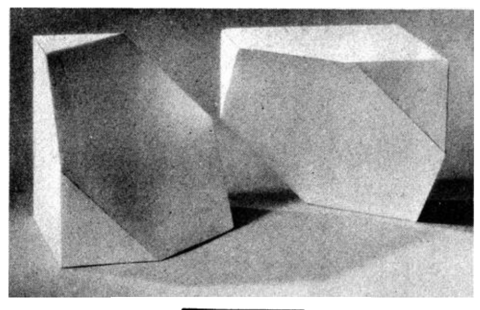


Fig. 197

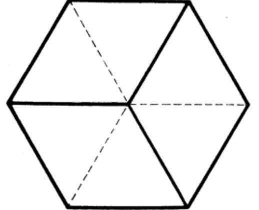


Fig. 198

Según Pohlke, podemos trazar, a partir de un punto, tres segmentos cualesquiera, completar la figura con segmentos paralelos (de trazos), y **(199, 200)** considerar la figura como proyección de un cubo (oblicua, por lo general).

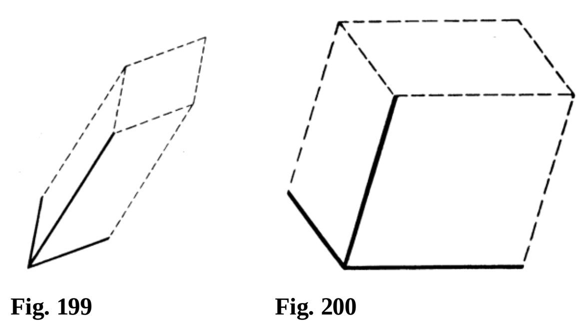


Fig. 199 **Fig. 200**

Es posible situar conjuntamente doce rombos de igual forma y tamaño, y formar con ellos dos hexaedros de distinta forma y tamaño; tendrán, sin embargo, iguales áreas **(201).**

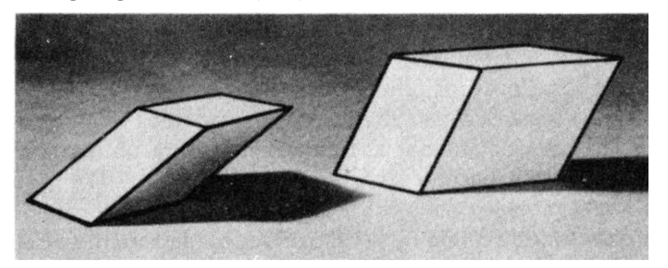


Fig. 201

Si construimos con alambre blanco un modelo de cubo **(202)** y superponemos después varias fotografías de él sobre una misma placa, haciéndolo girar en torno a su diagonal mayor siempre con el mismo ángulo antes de tomar cada vista, obtendremos una imagen **(203)** compuesta por dos conos y un hiperboloide de revolución. (La fotografía muestra claramente la hipérbola que es la meridiana de ese hiperboloide.) El hiperboloide es una superficie reglada, compuesta por dos familias de líneas rectas.

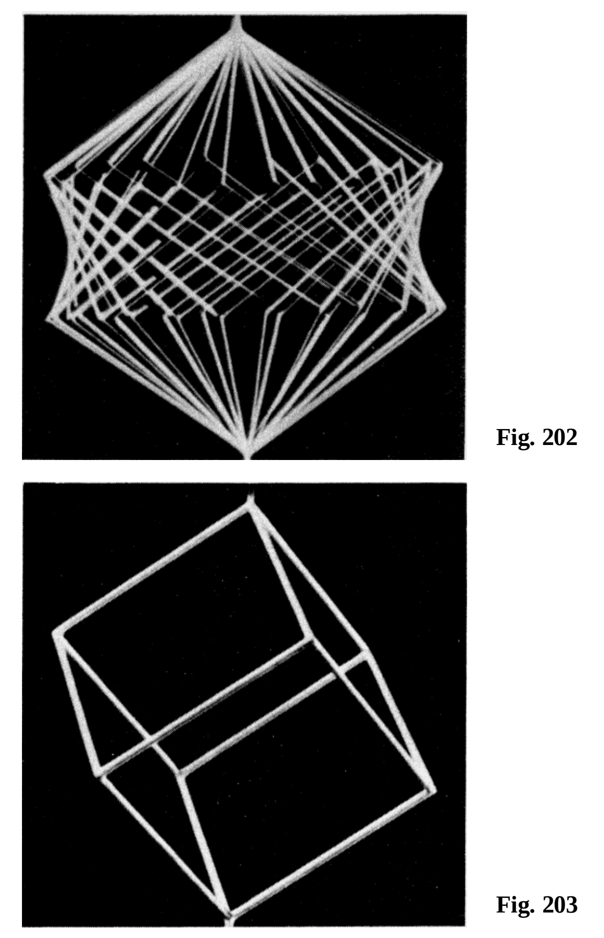


Fig. 202

Fig. 203

La línea recta es el camino más corto. Podemos valernos de esta propiedad para determinar la ruta mínima sobre un cubo. Si una araña estuviese al acecho sobre una cara del cubo **(204)**, y quisiera cazar a una mosca posada sobre la otra, hallará que el camino más corto corresponde a una recta dibujada sobre la superficie del cubo **(205)**. Si la mosca desease asegurarse de

que no hay sobre el cubo ninguna araña, y, abandonando su posición, decidiese caminar sobre todas las caras del cubo y retornar lo más rápidamente posible, su ruta sobre el dibujo **(206)** sería también una línea recta. Asimismo, el dibujo muestra claramente que la longitud del circuito no se ve afectada por el punto de partida **(207);** no obstante, la mosca puede elegir dos caminos diferentes. Los circuitos mínimos recubren el cubo entero con líneas (hexágonos) de longitud constante; para cada punto pasan dos de tales líneas. ¿Sería posible que una de estas familias fuera de hilo blanco, y otra de hilo rojo, de manera que en cada cara del cubo se tuviese una trama bicolor, de modo que los hilos del mismo color fueran paralelos? No, son necesarios 4 colores. (¿Por qué?)

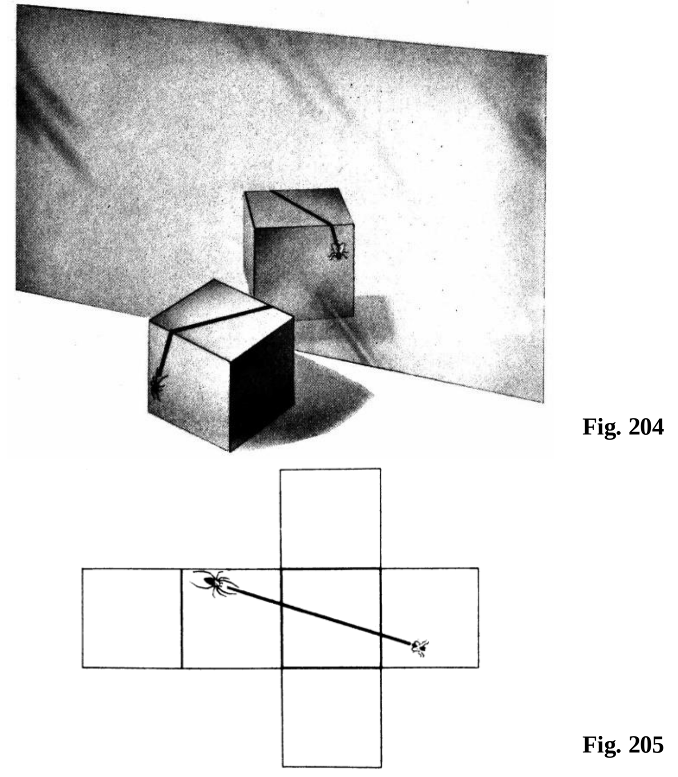


Fig. 204

Fig. 205

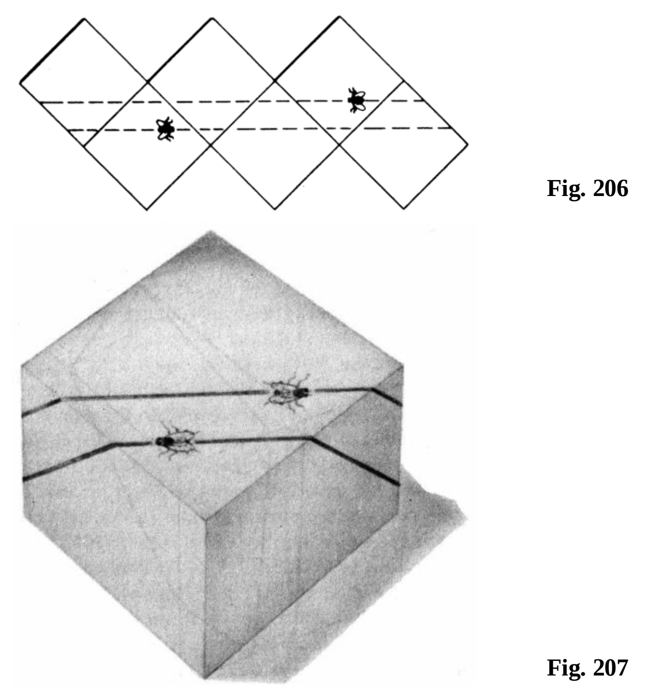


Fig. 206

Fig. 207

Si tejiéramos cada familia con hilos de colores diferentes obtendríamos tantos matices como pares de colores hubiera, es decir, 6 (por cada punto pasan 2 hilos). Sobre cada cara tendremos 4 matices; cada matiz ocupa en cada cara una porción de forma triangular. (¿Estará cada cara coloreada de modo diferente?)

El diagrama **(205)** nos servirá para otra cuestión. Consideremos que *A*, *B*, *C*, *D* sean los vértices de la base de una piedra cúbica, y que el cuadrado cuyos vértices no están rotulados sea la cara superior de dicho cubo. Una mosca posada sobre el punto medio *P* de una de las aristas superiores se dirige al lector en estos términos: «Me gustaría ir hasta el punto más lejano posible de la piedra. ¿Cuál es el punto más alejado, y cuál el camino más breve que me lleva hasta él?». *APDEFA* **(208)** es un recorrido cerrado. La distancia *CD* es 1/6, suponiendo que el lado = 1. Así, pues, *APD* =

$\sqrt{(4+1/36)} = 2{,}0067$. «Desarrollando» adecuadamente el cuadrado, y desplegándolo sobre la mesa de tal modo que *DEFA* forme una sola línea recta, es fácil calcular que también *DEFA* = 2,0067. ¿Responde el punto *D* a la pregunta que la mosca ha planteado al lector?

Cada uno de los puntos del sillar cúbico tiene un punto situado a la máxima distancia de él, pero no siempre los puntos a la mayor distancia están diametralmente opuestos: los puntos medios de lados opuestos no están alejados entre sí lo más posible. Llamaremos transitivos a tales puntos. En la esfera no hay puntos transitivos.

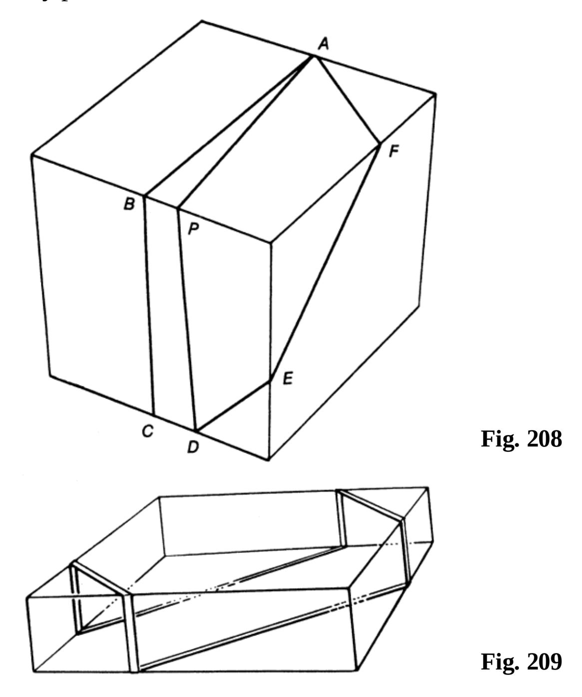


Fig. 208

Fig. 209

¿Existen otras superficies convexas que carezcan de puntos transitivos?

Algunas bombonerías presentan sus deliciosos productos en cajas oblongas, que rodean con una cinta oblicua, formando un octágono **(209)**. Es posible correr este octágono sin modificar su longitud, lo cual demuestra

que sobre tales cajas existe toda una familia de geodésicas paralelas entre sí. Se tiene así una solución para los recorridos de la mosca en torno a la caja, distintos de los dibujados en **(207).**

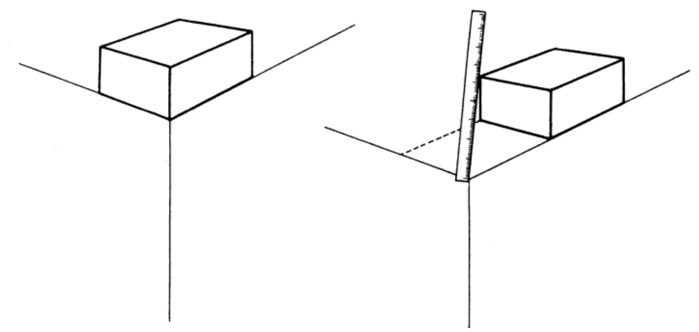


Fig. 210

¿Cómo podemos medir con una regla la diagonal mayor de una caja? Tenemos la respuesta en **(210).**

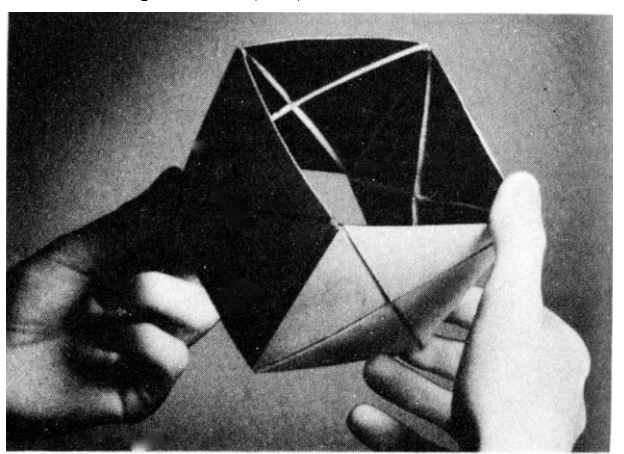


Fig. 211

La fotografía **(211)** muestra un cubo de cartulina: está desprovisto de base y de tapa, y su superficie interior es negra. Cada una de las cuatro caras

restantes está formada por cuatro triángulos. Tenemos, por lo tanto, 16 triángulos iguales. Vemos claramente las tiras flexibles que los conectan. A partir del cubo **(211)** podemos lograr volverlo del revés, convirtiendo el interior en exterior, como muestra la serie de fotografías **(212-217)**, llegando finalmente a la situación **(218)**, en la cual el modelo de partida queda con la superficie negra al exterior.

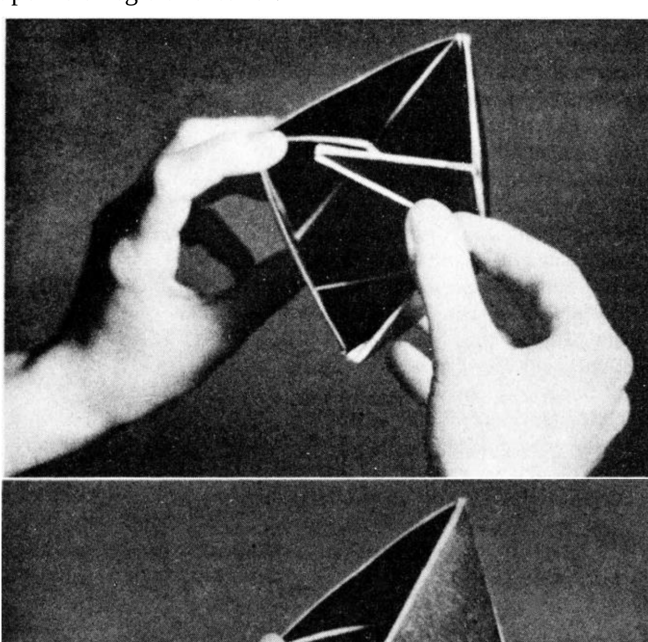


Fig. 212

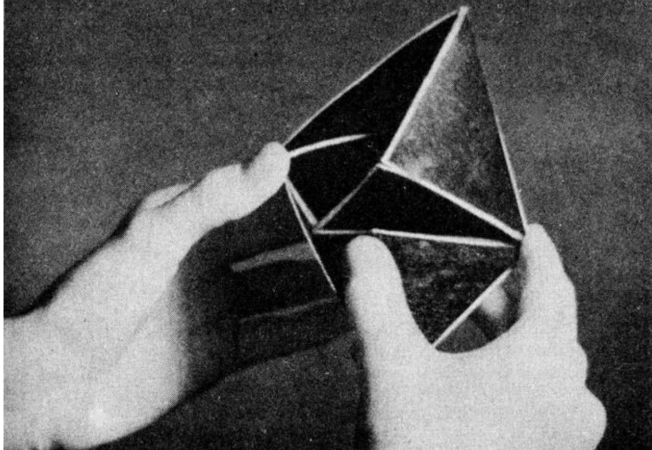


Fig. 213

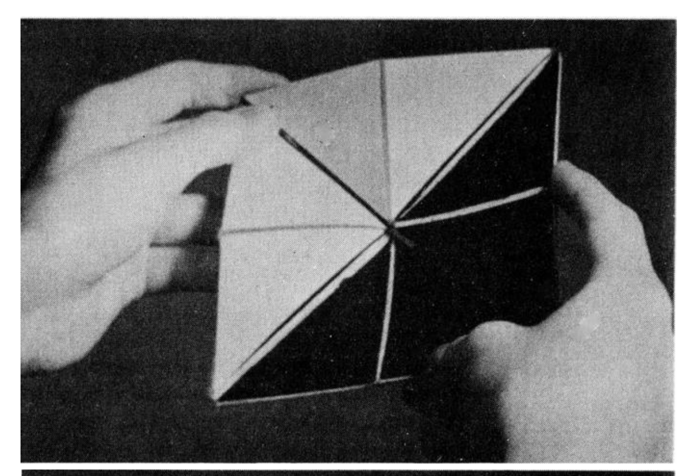


Fig. 214

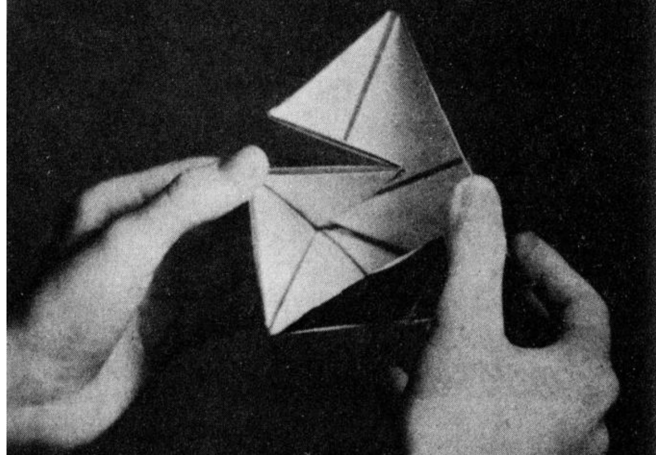


Fig. 215

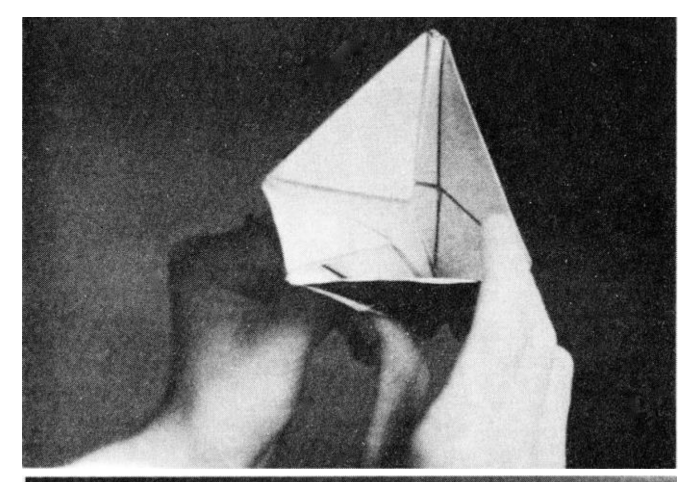


Fig. 216

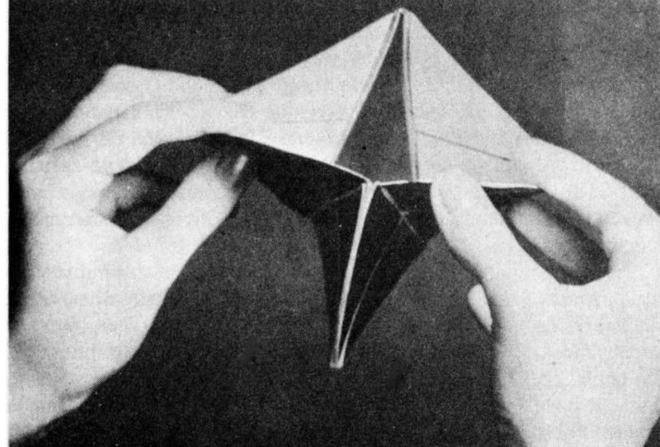


Fig. 217

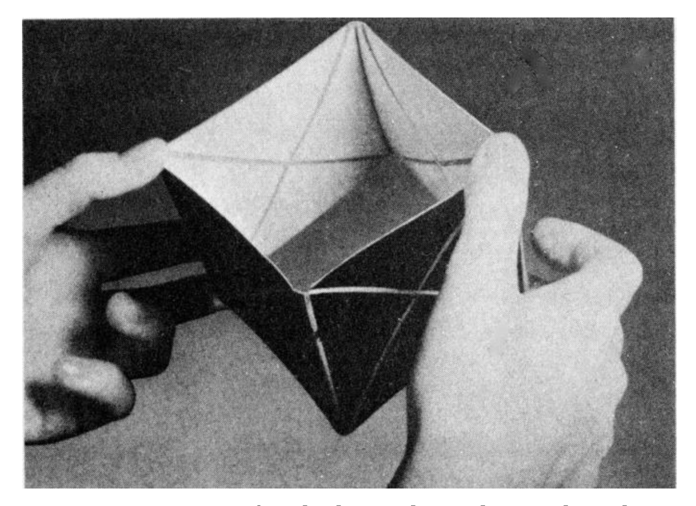


Fig. 218

Si tomamos un rectángulo de papel cuya longitud sea de cuatro veces su anchura podemos pegar entre sí los bordes estrechos, y obtener de este modo un cilindro abierto. La cuestión de volver el cilindro de dentro a fuera sin rasgar el papel ha sido ya resuelta **(211-218)**. El problema de lograr lo mismo cuando la circunferencia sea solamente el triple de la altura del cilindro implica un problema más complejo.

En ocasiones, para hallar caminos mínimos procederemos como hicimos con el cubo: extender sobre un plano la superficie sobre la cual ha de hallarse dicho camino, trazaremos una línea recta, y volveremos a plegar el modelo, devolviéndole la forma primitiva. Un cono, por ejemplo, es una superficie compuesta por un haz de líneas rectas (las generatrices). Si una mosca quisiera dar una vuelta en torno al cono, y regresar lo antes posible al punto del que partió, tendría que seguir el bucle **(219)**, que forma un ángulo en el punto de partida. Abriendo el cono a lo largo de una de las generatrices **(220)** y desarrollándolo tendríamos un sector circular: la trayectoria de la mosca constaría de dos rectas perpendiculares a los lados del sector. Si el cono fuera equilátero, o más romo todavía, la solución sería diferente: la mosca se dirige directamente a la base superior, da una vuelta en torno a ella, y retorna por el mismo camino.

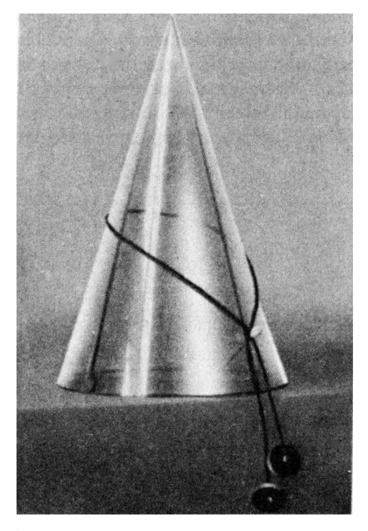


Fig. 219

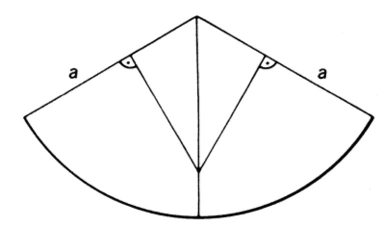


Fig. 220

Hay superficies que no es posible desarrollarlas sobre un plano, como se hizo con el cono; la esfera es una de ellas. Las líneas más cortas que se pueden trazar sobre la esfera son los círculos máximos, las llamadas *ortodromas,* en las que todos los meridianos son ortodromas. Imaginemos que fuese posible sin estirarla, extender sobre el plano la superficie esférica. Todas las ortodromas conservarían sus longitudes, convirtiéndose en los caminos más cortos sobre el plano, con lo que se convertirían en líneas rectas. Por otra parte, las ortodromas de la esfera son líneas cerradas, mientras que las líneas rectas no lo son. Este hecho demuestra la imposibilidad de extender la esfera completa sobre un plano. Pero incluso cuando tratamos de extender una porción de la esfera, por ejemplo, la porción de superficie terrestre situada al norte del círculo polar ártico, nos encontramos con un absurdo: los meridianos que convergen en el Polo Norte **(221, 222)** se convierten, al ser extendidos, en segmentos rectilíneos de la misma longitud, y, el casquete entero, en un disco cuyo contorno es un círculo. Tal círculo es el polar, el cual conserva también su longitud; el radio de este círculo al radio del círculo polar —que en el plano ha de verse cortando a la esfera en el círculo

polar, mientras que la distancia desde el Polo Norte, medida a lo largo del meridiano (que en el dibujo está representado por un arco curvo grueso) es, evidentemente, mayor. Así, pues, al extender el casquete, su radio ha de ser igual, al mismo tiempo, a dos segmentos diferentes, lo cual es absurdo.

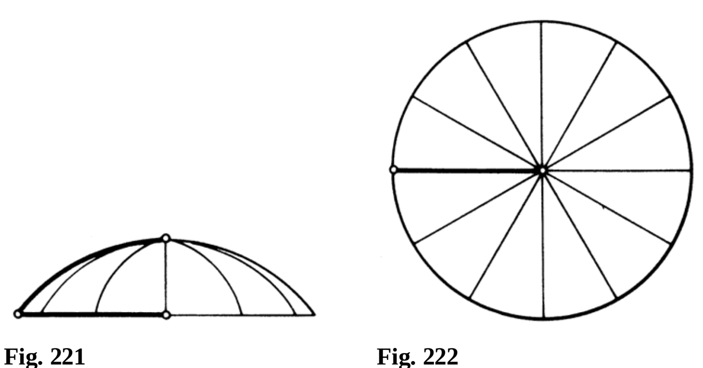


Fig. 221 **Fig. 222**

Algunos cartógrafos proponen proyectar la superficie de nuestro globo sobre un icosaedro cuyos veinte triángulos sean tangentes a nuestra esfera. El centro de ésta sería el centro de proyección. Eliminando los cuatro triángulos más cercanos al Polo Sur, y cortando el poliedro a lo largo de tres aristas **(223)**, podemos colocar 16 triángulos equiláteros sobre un plano horizontal: el punto central es el Polo Norte. Las ventajas de este proceder estriban en que la distorsión de un mapa triangular del tamaño 1/20 del globo es la misma para todos los triángulos, y que los cuatro triángulos que faltan corresponden a la parte casi deshabitada de la Tierra.

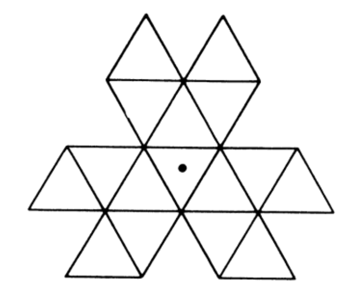


Fig. 223

Hemos mencionado ya la posibilidad de llenar con cubos la totalidad del espacio. También lo conseguiremos merced al procedimiento siguiente: colocamos cubos alternativamente blancos y negros, a modo de damero tridimensional, y luego retiramos los cubos negros.

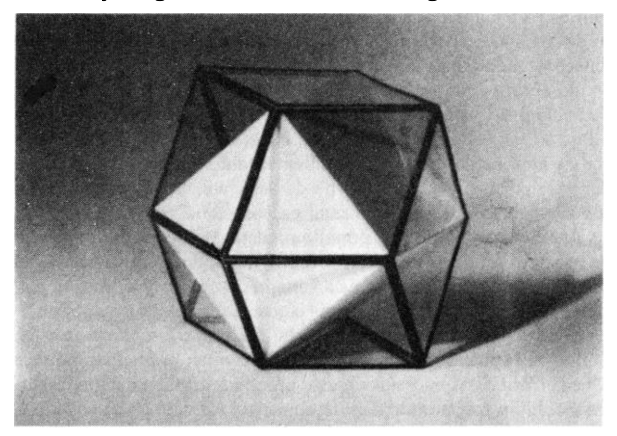


Fig. 224

Descomponemos cada uno de los huecos en seis pirámides de bases cuadradas, con vértice en el centro del hueco cúbico. Si nos fijamos en sólo uno de los cubos blancos **(224)**, provisto de 6 pirámides con bases en él, veremos un dodecaedro rómbico con un cubo inscrito en su interior: por la definición de nuestro procedimiento, es obvio que habremos llenado la totalidad del espacio **(225)** con dodecaedros rómbicos congruentes. Es muy fácil hallar el volumen de uno de estos dodecaedros: hemos utilizado dos cubos para construir un sólo dodecaedro, su volumen, por lo tanto, es $2a^3$, siendo a la arista del cubo. La más corta de las diagonales de las caras rómbicas mide a la más larga, $a\sqrt{2}$: así, pues, los lados de los rombos miden $b = a\sqrt{(3/2)}$, y el volumen $2a^3$ del sólido es igual a $16b^3/3\sqrt{3}$. Los vértices son de dos tipos: (1) de concurrencia de 4 sólidos y (2) de concurrencia de 6 sólidos.

Las celdillas de un panal se obtienen a partir de dos capas de dodecaedros, sustituyendo las caras libres (3 en cada dodecaedro) por una apertura hexagonal **(226)**. En consecuencia, hay, en cada celdilla, puntos donde concurren 4 celdillas, y puntos en los que lo hacen 6.

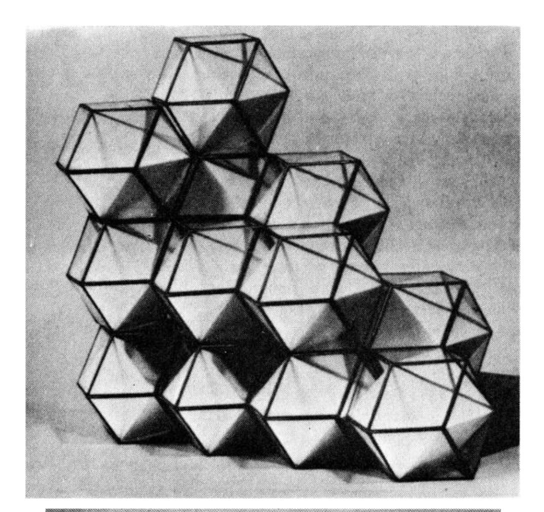


Fig. 225

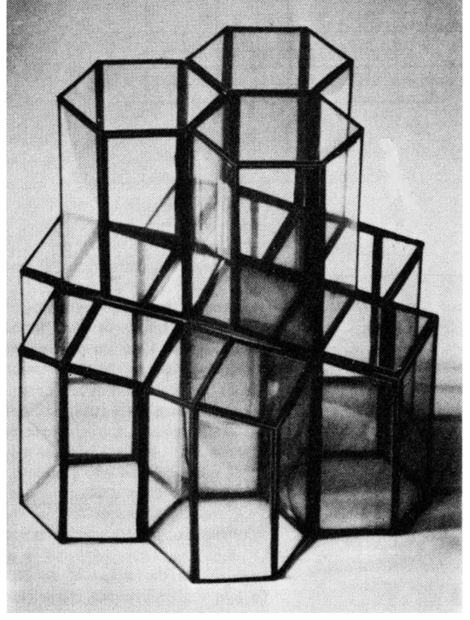


Fig. 226

La posibilidad de llenar totalmente el espacio con poliedros congruentes plantea la interesante cuestión de lograr que solamente haya en cada vértice 4 poliedros concurrentes (es imposible tener sólo 3). Para hallar tales poliedros, fijémonos en los ladrillos de una pared, extendiéndose indefinidamente en todas las direcciones. Al colocar la primera capa nos atendremos a la regla práctica del albañil, de bloquear los intersticios adosando ladrillos **(227)**. Fijémonos en que la primera capa (líneas continuas en el dibujo) no es una teselación esencialmente nueva del plano. Si consideramos como vértice todo punto donde concurran tres ladrillos, vemos que toda la región es un hexágono, y el total, sólo una distorsión de la configuración **(71)** de panal. Al depositar sobre esta primera capa una segunda similar (líneas de trazos) hemos de cubrir cada vértice con un ladrillo. Tendremos así cuatro ladrillos tocándose en cada vértice. Al colocar una tercera capa sobre la segunda, la situamos exactamente sobre la primera. El procedimiento se repite indefinidamente.

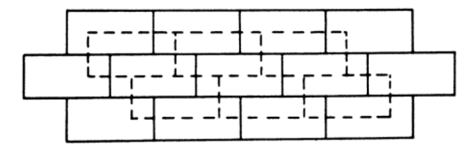


Fig. 227

Contemos ahora cuántos vecinos tiene cada ladrillo **(228)**. Hay 6 en su misma capa, 4 en la superior, y 4 por debajo de él: 14 en total. Imaginemos pintados de negro los bordes vecinos, y vayamos gradualmente descomponiendo nuestra obra de albañilería **(229), (230),** para ver en el ladrillo blanco las huellas que han dejado las aristas de los ladrillos adyacentes.

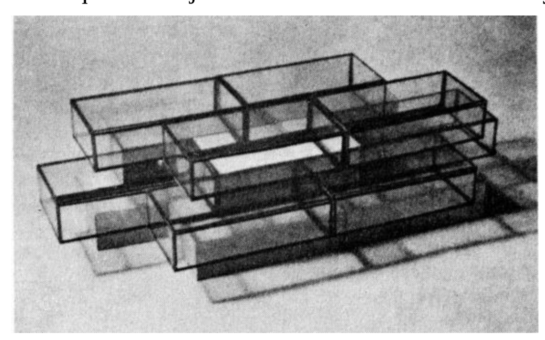


Fig. 228

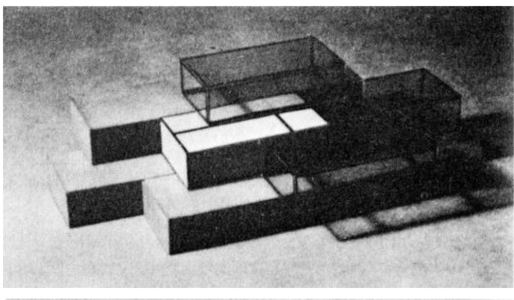


Fig. 229

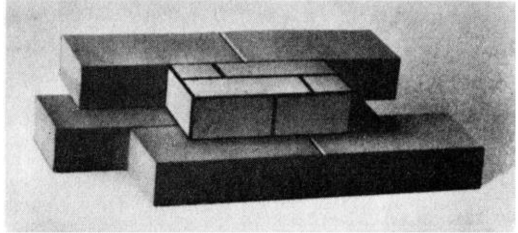


Fig. 230

Vemos 14 dominios, señalados por los 14 vecinos. Así, el ladrillo es un 14-edro, comprimido hasta tomar la forma de un ladrillo ordinario. Para descubrir cuál sería la forma no deformada del poliedro, fijémonos en que sobre el cuadrado hay 6 «cuadrados» y 8 «hexágonos».

Tal observación nos lleva al octaedro truncado **(231).** Tenemos aquí nuestro ladrillo deformado, que llena la totalidad del espacio **(232)** de tal modo que tan sólo 4 sólidos concurren en cada vértice: es un poliedro semi-regular, es decir, cuyas caras son polígonos regulares. No existe ningún otro poliedro que tenga estas propiedades, y dé, por consiguiente, la más sencilla descomposición del espacio en partes congruentes.

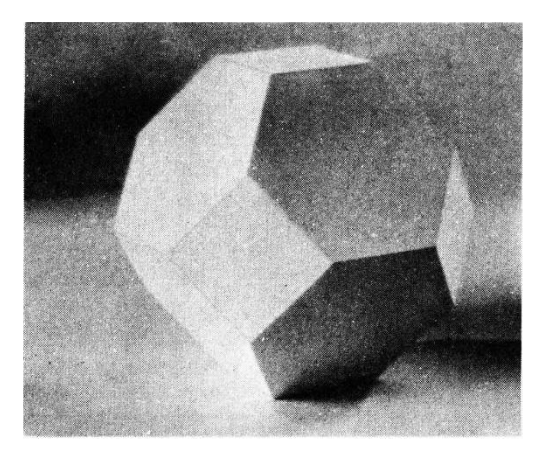


Fig. 231

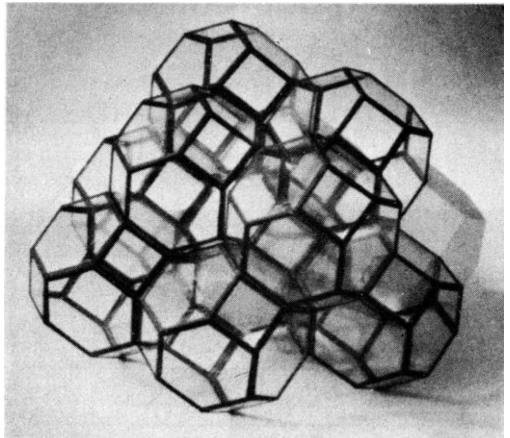


Fig. 232

8. Sólidos platónicos, cristales, cabezas de abeja y jabón

Platón sabía que sólo existen cinco poliedros regulares. ¿Cómo hacer cuatro triángulos iguales con seis cerillas? Para conseguirlo es preciso formar primero, con tres cerillas, el triángulo de la base, y, con las restantes, formar las tres aristas de una pirámide.

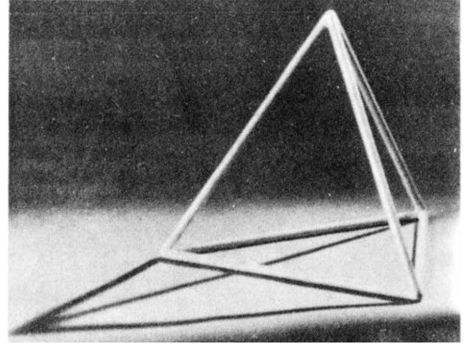


Fig. 233

Al proceder así **(233)** se crea un tetraedro regular: el primero de los poliedros platónicos. Tiene el aspecto que vemos **(234)** al ser verticalmente proyectado sobre su base.

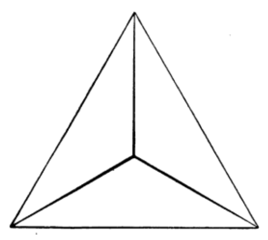


Fig. 234

Otra proyección dará un cuadrado con diagonales **(235)**. Es factible obtener modelo a partir de un diagrama plano **(236)**. Pintando de diferentes colores las cuatro caras de un tetraedro, y haciendo rodar sobre un plano un

modelo recién pintado, se obtiene la teselación **(237)**. Es un hecho muy notable el que al hacer rodar el tetraedro de acá para allá, en cualquier dirección que se quiera, nunca se entremezclen los colores. (¿Se podría hacer otro tanto con un octaedro pintado de ocho colores?)

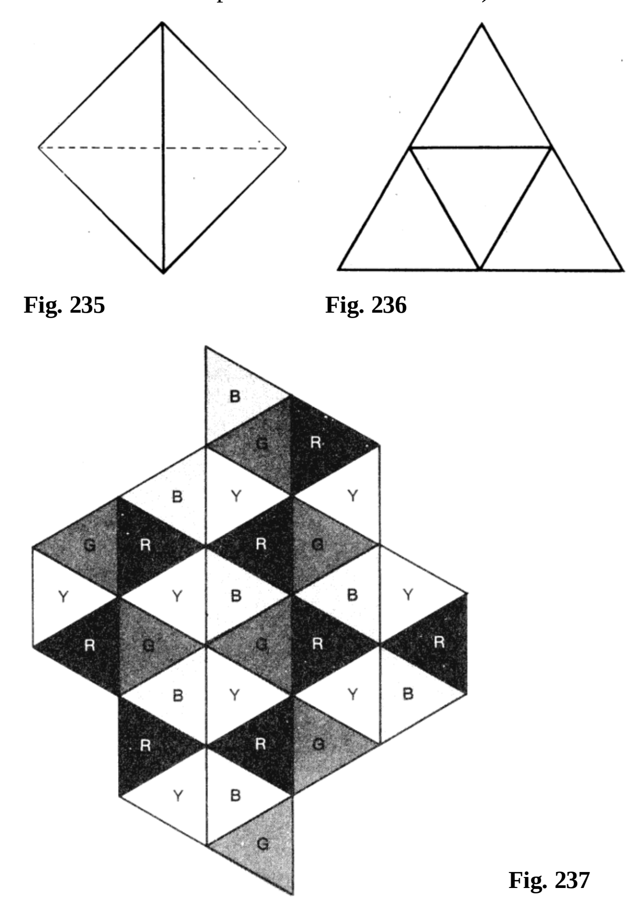


Fig. 235 **Fig. 236**

Fig. 237

El segundo de los cuerpos platónicos, el cubo, ha sido mostrado ya. Con 27 cubos iguales es posible construir un cubo mayor. Pintando de negro las

caras de este cubo grande, y volviendo a descomponerlo en cubitos, habrá cierto número de cubos con tres caras ennegrecidas, otros con dos, algunos con solo una, e incluso, alguno no ennegrecido en absoluto. ¿Cuántos hay en cada grupo?

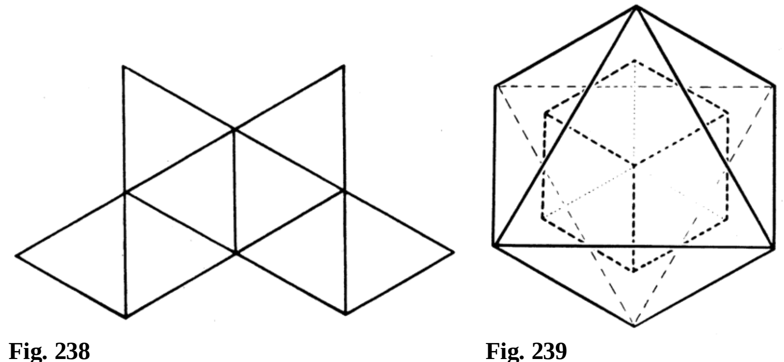


Fig. 238 **Fig. 239**

A partir de ocho triángulos equiláteros **(238)** se construye el tercero de los sólidos platónicos: el octaedro regular. Haciéndolo descansar sobre una de sus caras triangulares, y proyectándolo sobre el plano de la base, obtenemos el dibujo **(239),** que muestra (líneas de trazos gruesos) que los centros de las caras del octaedro **(240)** son también los vértices de un cubo. Recíprocamente, los centros de las caras del cubo **(241)** son vértices de un octaedro.

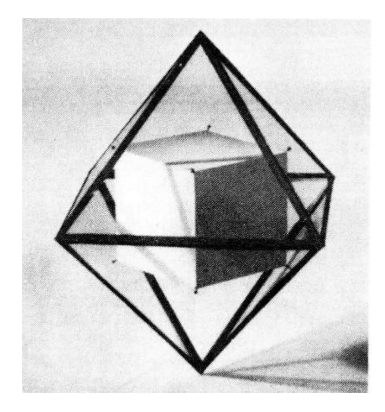


Fig. 240

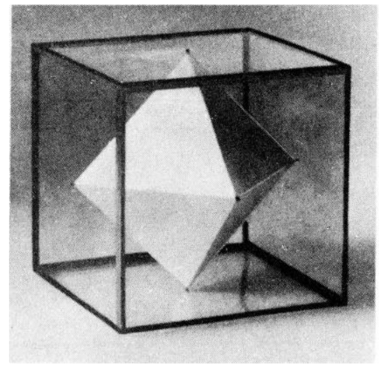


Fig. 241

El siguiente sólido platónico, el dodecaedro regular **(242),** tiene caras pentagonales. Construiremos fácilmente un modelo partiendo del diagrama **(243).** Hemos de hacer pasar la punta de un cuchillo a lo largo de las aristas (por la cara de la cartulina que ahora se ha convertido en exterior del modelo); después colocamos de través una de las estrellas sobre la otra **(245)** y las atamos pasando un hilo elástico alternativamente por encima y por debajo de los vértices de la estrella doble, que mantendremos adosadas una a otra con la otra mano. Al retirar la mano **(246),** vemos surgir el dodecaedro **(247)** formando un modelo perfecto. Para pintar sus caras de modo que las caras adyacentes sean de colores distintos no serán suficientes menos de cuatro colores.

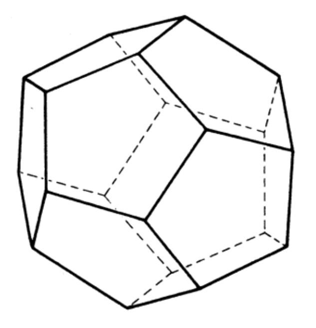


Fig. 242

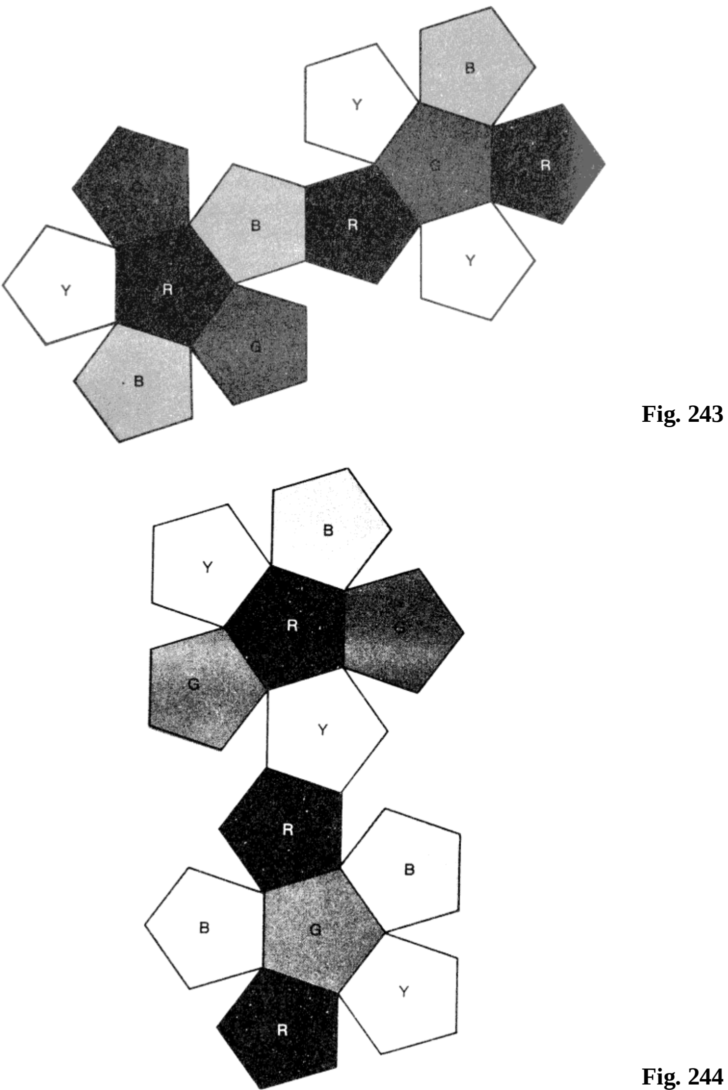


Fig. 243

Fig. 244

Elijamos cuatro colores, por ejemplo, rojo, verde, azul y amarillo, y distribuyámoslos sobre el dodecaedro, sea como ilustra el dibujo **(243)** o de otro modo esencialmente diferente **(244).** (¿Será posible transformar uno de estos modelos en el otro por medio de giros y simetrías?)

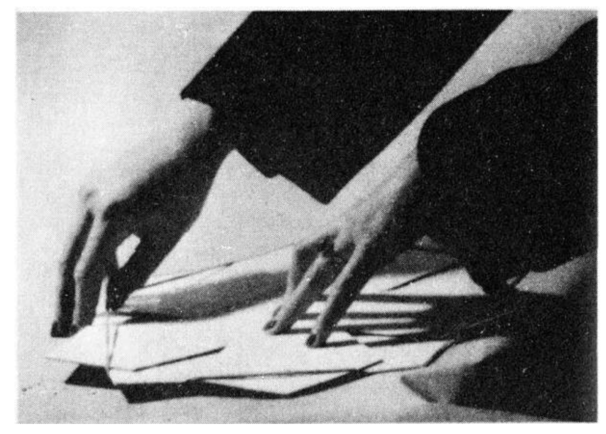


Fig. 245

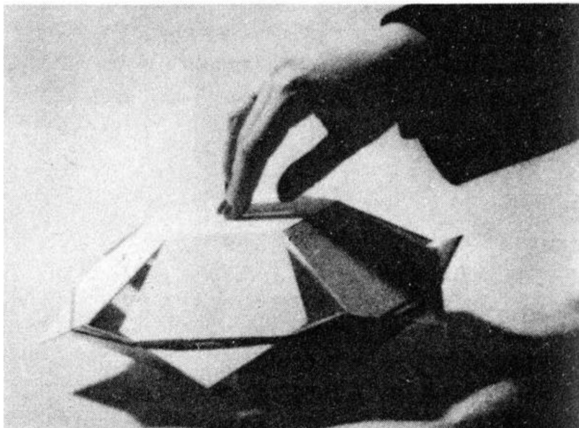


Fig. 246

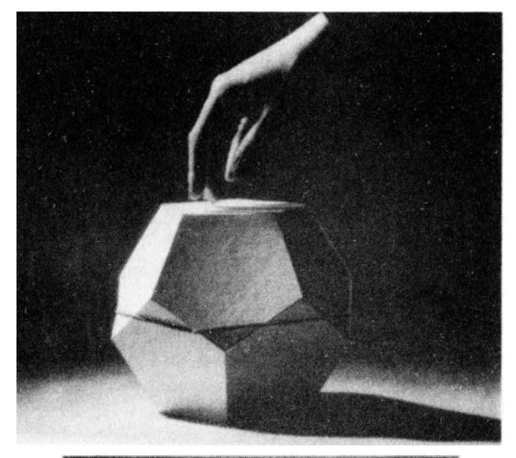


Fig. 247

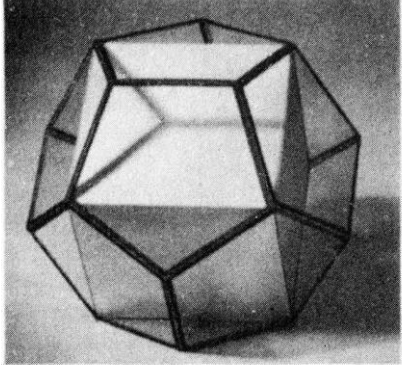


Fig. 248

Podemos inscribir un cubo en un dodecaedro regular de tal modo que cada arista del cubo pase a ser una diagonal de una cara del dodecaedro **(248).** Lo conseguiremos de cinco modos distintos, y los cinco cubos formarán un nuevo poliedro estelar. Sin embargo, el espacio común a estos cinco cubos en un 30-edro **(266).**

El último de los sólidos regulares es el icosaedro. Su diagrama **(249)** está compuesto por veinte triángulos equiláteros. Su proyección horizontal **(250)** puede combinarse con la del dodecaedro **(251).** En efecto, los centros de las caras **(252)** del dodecaedro constituyen los vértices del icosaedro,

como demuestra nuestro modelo. Recíprocamente, los centros de las caras del icosaedro son los vértices del dodecaedro **(253), (254).** El tetraedro al ser los centros de sus caras vértices de otro tetraedro, **(255)** sólo se corresponde consigo mismo.

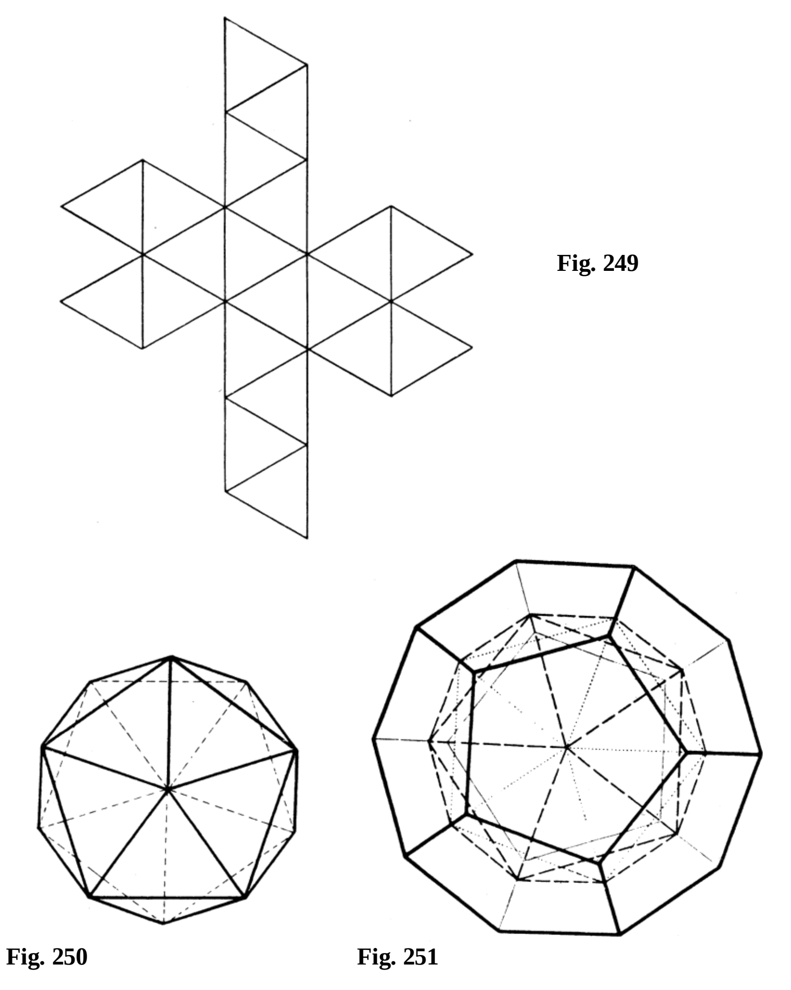


Fig. 249

Fig. 250

Fig. 251

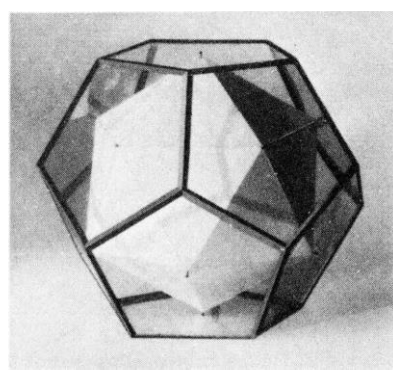


Fig. 252

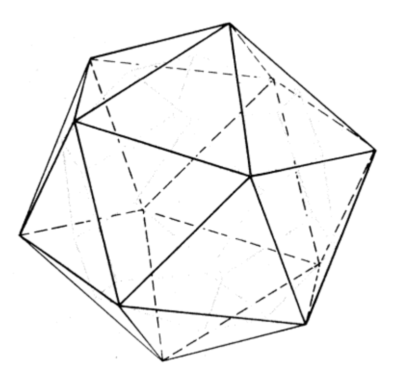


Fig. 253

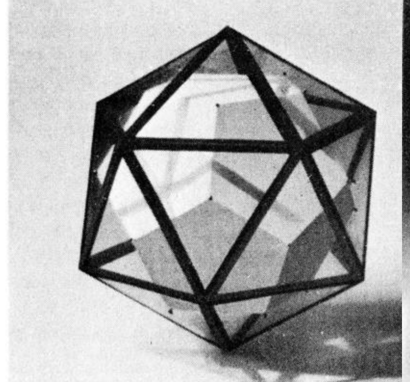


Fig. 254

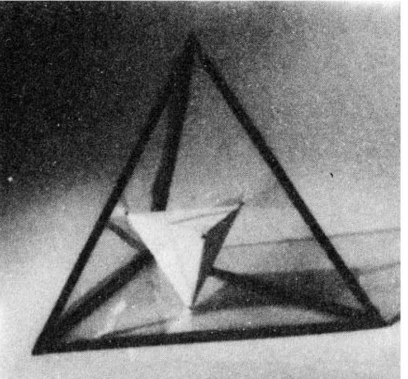


Fig. 255

Las bolas de igual tamaño no llenan totalmente un espacio. El mismo principio es válido para círculos en un plano **(256)**. Su distribución de máxima densidad nos recuerda un panal. Imaginaremos fácilmente cómo al comprimir los círculos, unos contra otros, éstos quedarían convertidos en hexágonos. El empaquetamiento de esferas de máxima densidad se obtiene

dividiendo la totalidad del espacio en celdillas cúbicas (sin paredes, pero con aristas de alambre), llamándolas alternativamente blancas y negras, y colocando en cada celdilla blanca una esfera lo más grande posible. Por lo tanto, sólo la mitad de las celdillas llevarán esferas, y será fácil calcular la razón de la porción de espacio ocupada por las esferas con respecto al espacio total.

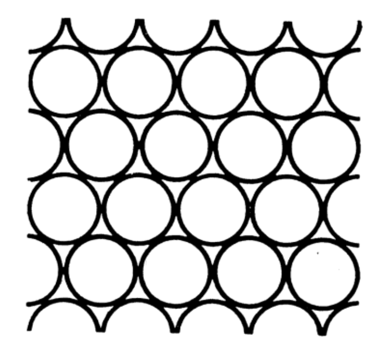


Fig. 256

Por cada pareja de cubos hay una esfera; sea a la arista del cubo: el radio de una esfera es la mitad de la diagonal del cuadrado a^2, es decir, $a\sqrt{2}/2$. Por consiguiente, el volumen de la esfera será:

$$4/3\pi\times(a\sqrt{2}/2)^3$$

y siendo $2a^3$ el volumen del par de cubos, la razón es $\pi\sqrt{2}/6 = 0{,}7403$. Así, pues, el más denso de los empaquetamientos de esferas ocupa aproximadamente el 74% del total del espacio. Por lo tanto, si tenemos jabón mezclado con gasolina, y en la mezcla la proporción de jabón es de más del 75%, podemos estar seguros de que la gasolina no podrá formar un medio en el cual el jabón esté suspendido en pequeñas bolitas, sino que, por el contrario, sabemos que será la gasolina la suspendida en el jabón. Por consiguiente, la emulsión no será inflamable, y su uso doméstico no es peligroso. Una emulsión que contenga más del 75% de gasolina es, con certeza, inflamable. ¿Qué puede decirse de una emulsión con el 50% de gasolina?

Existe otro procedimiento que conduce también al empaquetamiento de mayor densidad de esferas. Colocamos primero una capa de bolas sobre el plano, de modo que, vistas en planta, tengan el aspecto de **(256).** Colocamos

ahora sobre la primera una capa similar, situando cada bola de la capa superior en el hueco formado por tres bolas contiguas. Fijémonos en que no es posible colocar bolas en huecos contiguos. Así, pues, si colocamos ahora una tercera capa sobre la segunda, podemos hacerlo de tal modo que sus bolas vayan a situarse sobre los huecos de la primera capa que quedaron libres al colocar la segunda **(257).**

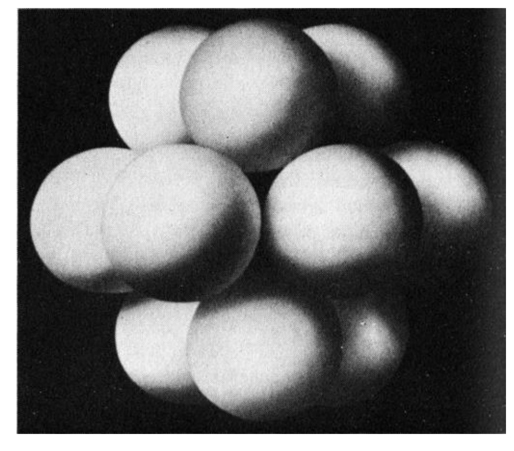


Fig. 257

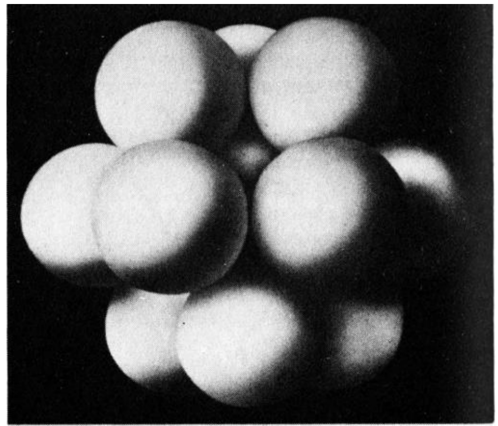


Fig. 258

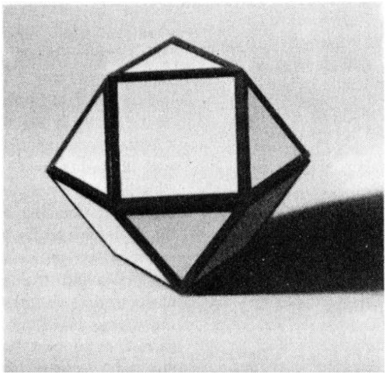


Fig. 259

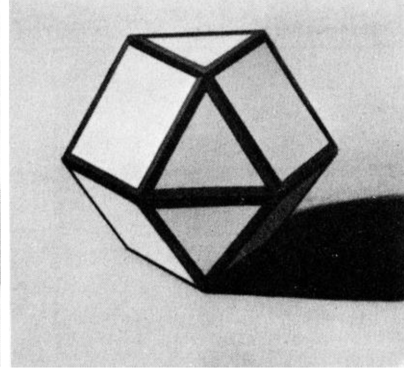


Fig. 260

También es factible disponerlos de otro modo **(258),** de forma que sus bolas queden situadas directamente sobre las de la primera capa. En ambos casos, cada una de las bolas de la capa segunda está en contacto con 12 vecinas. Estos puntos de contacto, en el primer método, son los vértices de un cubo-octaedro, el cristal de argentita (Ag_2S) **(259)**, que resulta de truncar los vértices de un octaedro regular interceptándolos por un cubo cuyas caras dividan por la mitad a las aristas del octaedro. En el segundo método dan los vértices de otro 14-edro **(260),** compuesto, como el primero, por 6 cuadrados y 8 triángulos equiláteros. Si lo dividimos en dos, pasando un plano por las aristas que forman un hexágono, y hacemos girar 60° una mitad contra la otra, y volvemos a unir las dos mitades, obtenemos el cubo-octaedro.

Supongamos ahora que las bolas sean de levadura, y que en la cocción crezcan todas por igual. Los huecos que dejan entre sí quedarán rellenos, y cada bola se transformará en un poliedro cuyas caras se podrá ver que corresponden a los planos tangentes comunes a las esferas. En el primer caso, obtendremos los dodecaedros rómbicos de **(224)**, **(225)**, y, en el segundo, sólidos **(261)** limitados por 6 rombos y 6 trapezoides. Obtenemos el primer sólido a partir del segundo, cortándolo a lo largo del ecuador, y haciendo girar 60° la mitad superior en torno a un eje vertical. Encontramos así que ambos sólidos tienen el mismo volumen, la misma superficie, y vértices del mismo tipo, mientras que sus caras ofrecen iguales circunferencias, las mismas áreas y los mismos ángulos. El primer método de empaquetamiento de

esferas muestra también que es posible inscribir el cubo-octaedro en dodecaedro rómbico; el segundo método da un resultado similar. (¿Cual?). Hemos visto ya que es factible llenar el espacio de dodecaedros rómbicos. El experimento de la levadura muestra asimismo que es posible que quede relleno con los otros dodecaedros. ¿Es esta distribución de esferas idéntica a la distribución **(257)** o a la **(258)**?

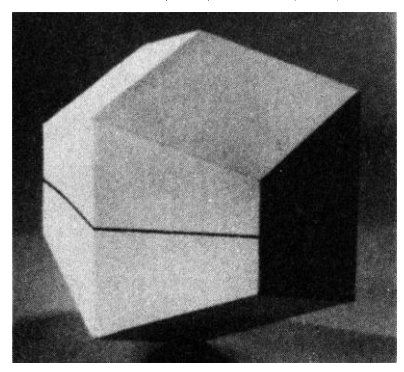


Fig. 261

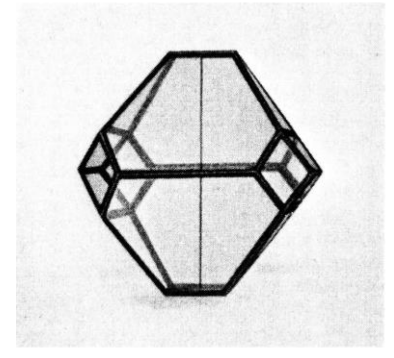


Fig. 262

Obtendremos las celdillas de un panal comprimiendo, unas contra otras, dos capas de bolas situadas unas sobre otras del modo más denso. Obtenemos de este modo dos capas de columnas hexagonales angulares, cubiertas por tejados trirrómbicos; los tejados de una de las capas serán también los de la otra. Podríamos explicar el origen de los panales como resultado de la acción de bolas elásticas (en este caso, las cabezas de las abejas empaquetadas lo más densamente posible sobre ambos lados de una delgada rebanada de cera).

Se podría uno preguntar: ¿qué empaquetamiento del espacio es mejor: el correspondiente a los dodecaedros **(242, 247),** o el de los 14-edros semiregulares **(259, 260)**? La cuestión que interesa es el modo más económico, es decir, ¿en cuál de ellos se necesita menos material para las caras? El segundo modo de rellenar el espacio (al que hemos llamado «método más sencillo») es aproximadamente un 0,6% más económico. En otras palabras: si estos cuerpos tienen el mismo volumen, el área de la superficie del 14-edro es, entonces y aproximadamente, un 0,6% menor que la superficie del

dodecaedro. Es muy notable el hecho de que tan diminuta diferencia se perciba por inspección. Es posible ver que el 14-edro se aproxima más a la esfera, la cual, como luego veremos, significa que es la superficie óptima desde el punto de vista económico.

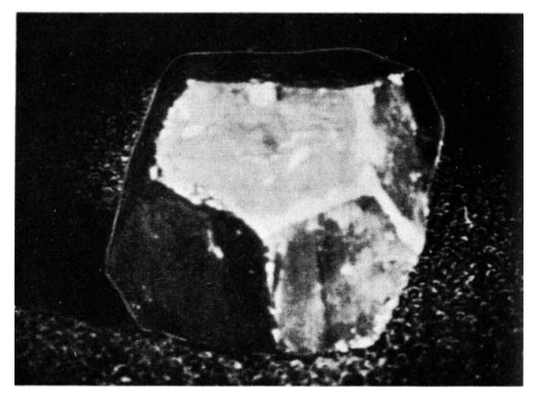
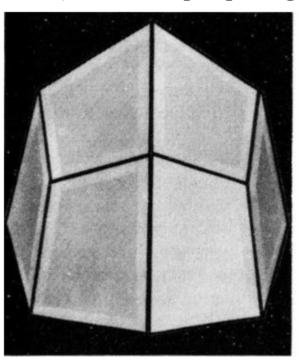


Fig. 263

El cristal de fluorita (CaF_2) **(262)** recuerda al octaedro truncado, nuestro ladrillo deformado de **(231)**. El cristal de pirita (FeS_2) recuerda a un dodecaedro regular **(263)**. Otros minerales cristalizan en formas irregulares muy interesantes: los cristales de esfalerita (ZnS) son dodecaedros limitados por deltoides congruentes **(264);** la cuprita (Cu_2O) toma la forma de trisoctaedros (24-edros) limitados por pentágonos congruentes irregulares **(265)**.



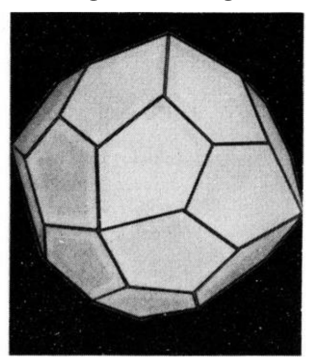




Fig. 264 **Fig. 265**

Si colocamos un plano a lo largo de cada arista de un dodecaedro regular, perpendicularmente al plano de simetría en el que yace este eje, obtendremos **(266)** un triacontaedro rómbico (30-edro). Las diagonales de las caras rómbicas son las aristas de poliedros regulares: las más cortas dan un dodecaedro, y, las más largas, un icosaedro. Procediendo con el triacontaedro como antes procedimos con el dodecaedro, obtenemos un 60-edro. (¿Qué formas tendrán sus caras?)

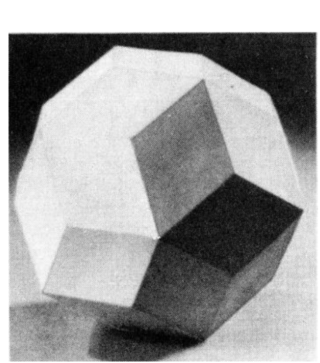


Fig. 266

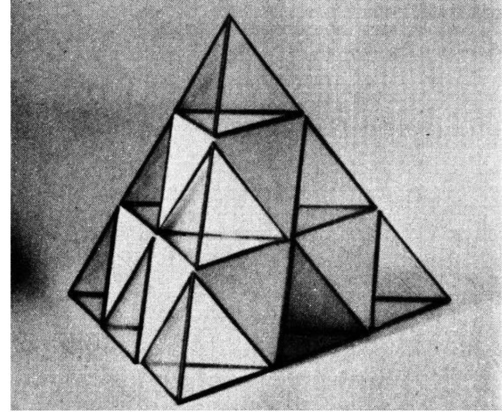


Fig. 267

El problema del reparto proporcional de escaños, que para tres partidos políticos fue resuelto en el plano **(69)**, conduce, en el caso de cuatro partidos, a una división de un tetraedro regular mediante planos paralelos a sus caras, y equidistantes unos de otros **(267)**. Empleando un número infinito de planos en cada una de las cuatro familias de planos paralelos equidistantes, se llena por completo el espacio entero mediante tetraedros y octaedros regulares.

Además de los polígonos regulares tenemos las llamadas «formas estrelladas». La estrella pentagonal, **(268)**, o «pentagramma mysticum», es la figura favorita de magos y astrólogos. Hay tres heptágonos, **(269, 270, 271)**, uno convexo, y dos estrellados. Esta fotografía **(272)** da una idea de un poliedro limitado por 12 pentágonos estrellados.

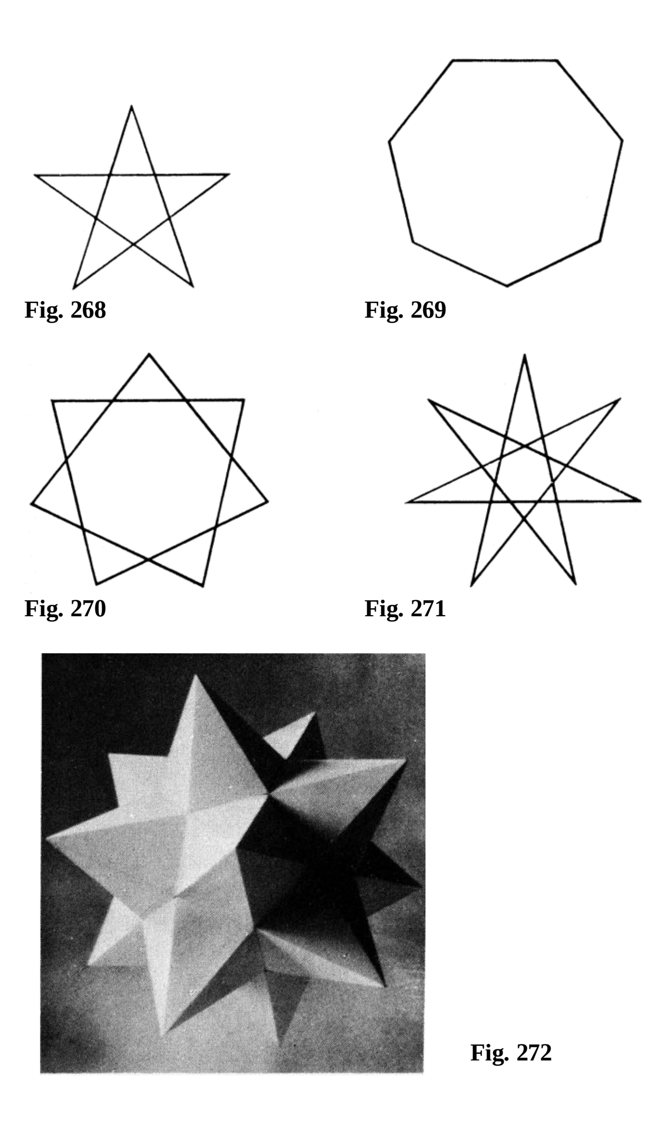


Fig. 268 **Fig. 269**

Fig. 270 **Fig. 271**

Fig. 272

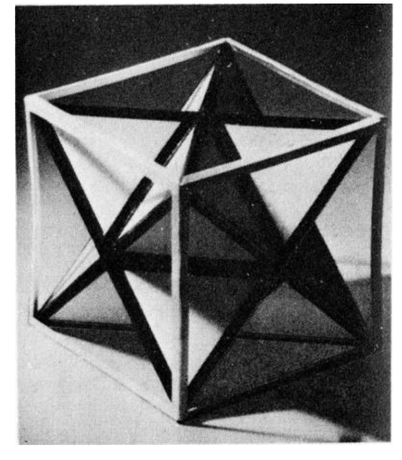


Fig. 273

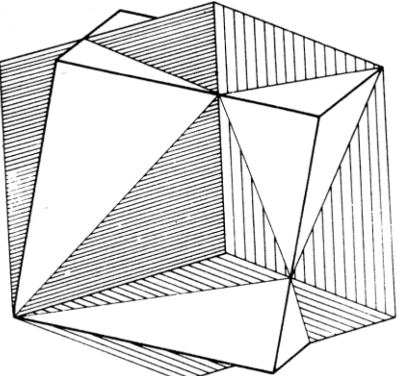


Fig. 274

Lograremos que cuatro vértices de un cubo lo sean de un tetraedro regular. Ello es posible de dos modos **(273)**, y los dos tetraedros, en conjunción, dan un «octaedro estrellado».

El lector podría explicar el dibujo **(274)**, que muestra dos cubos. ¿Cuántas caras tiene el poliedro compuesto por las partes comunes a ambos?

9. Pompas de jabón, Tierra y Luna, mapas y fechas

Para obtener una esfera, lo más sencillo es inflar una pompa de jabón **(275)**. La tensión superficial de la película líquida tiende a reducir al máximo el área de su superficie.

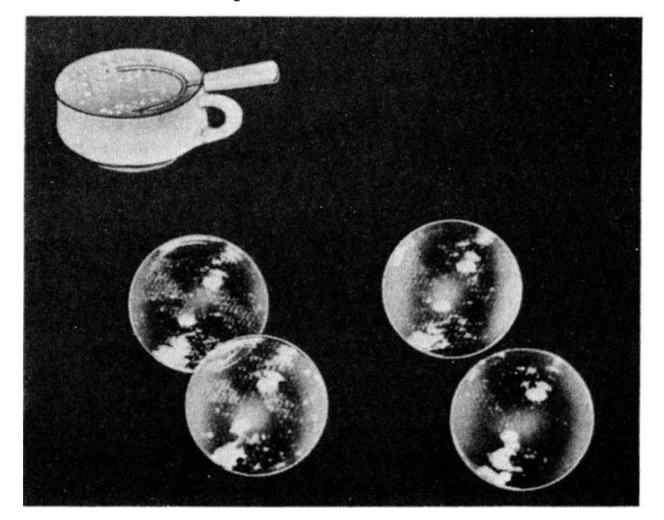


Fig. 275

La pompa encierra en sí cierta cantidad de aire y, por ello, la película jabonosa toma la forma de una superficie, que para un volumen dado tenga área mínima posible. La esférica es la única superficie que posee esta propiedad. La Luna fue en tiempos una bola líquida; al atraer cada gota de fluido a cada una de las gotas de la masa fluida, las gotas se dispusieron de tal modo que todo cambio de forma exigiera la realización de un trabajo. Puede demostrarse que solamente la forma esférica goza de tal propiedad. Las fotografías **(276, 277)** muestran un globo, y la Luna, siendo simultáneamente iluminados por el Sol.

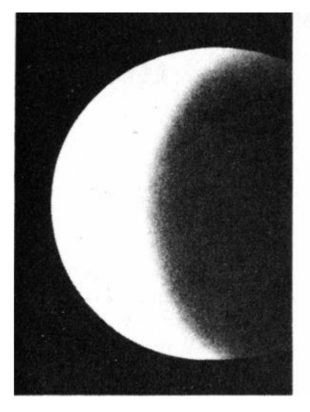


Fig. 276

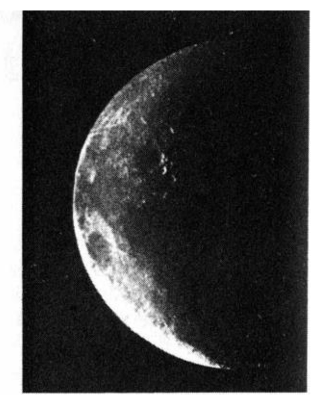


Fig. 277

Si tomamos un tubo que tenga dos aberturas circulares **(278),** las mojamos en agua jabonosa, y soplamos suavemente por el tubo, vemos crecer inicialmente dos casquetes iguales de película jabonosa, hasta que llegan a formar sendos hemisferios. Sucede entonces algo muy extraño: una de las pompas sigue creciendo, mientras que la otra disminuye. La razón de tal comportamiento estriba en la propiedad de ser la esfera la superficie de área mínima capaz de encerrar un volumen dado. Una vez insuflado en el tubo un cierto volumen de aire, el problema que la naturaleza tiene que resolver es el de encerrar el exceso de aire que supera al volumen total del tubo en una superficie tan pequeña como sea posible, con la condición de que ambas burbujas estén ligadas a los bordes circulares. El problema es el mismo que el de encerrar un volumen dado en una superficie que tuviera una parte por encima de una superficie circular, y otra por debajo de ella, puesto que siempre podremos unir las dos burbujas sin alterar ni el volumen ni el área. Mientras el volumen de aire sea demasiado pequeño para llenar una esfera que tuviera por ecuador la boca del tubo, la solución es una lente simétrica. Esta lente crece hasta convertirse en una esfera, y a partir de ese momento existe siempre una esfera, que descansa sobre la boca del tubo, y que es lo suficientemente grande como para albergar cualquier volumen de aire. Vemos tal esfera en nuestro dibujo, con su parte inferior marcada por un arco a

trazos. Cuando devolvemos este arco a la otra abertura, comprobamos que la segunda burbuja decrece. (¿Cómo?)

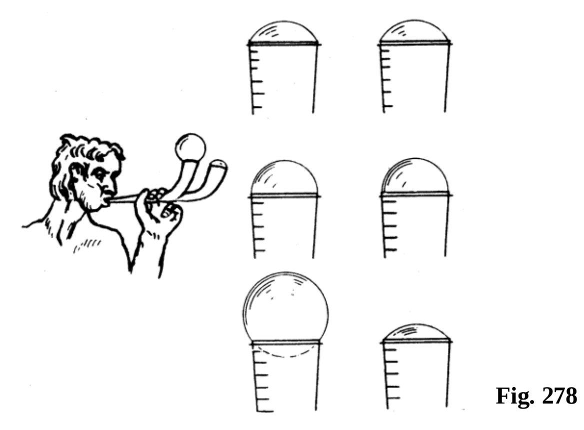


Fig. 278

La Tierra tiene la forma de esfera **(279).** Una de las dos líneas negras que unen Lisboa con el cabo Farewell (el situado más arriba, es decir, más al norte) representa la ruta más corta entre los dos lugares. Es uno de los círculos máximos de la esfera, una de las llamadas ortodromas (los meridianos también son ortodromas; de los paralelos, o líneas de igual latitud, solamente el Ecuador es una ortodroma). La segunda línea es una loxodroma, es decir, la línea que resultaría de mantener un rumbo constante: intercepta a los meridianos en ángulo constante. Un navegante que eligiera un rumbo en la brújula, y lo mantuviese constantemente, seguiría una loxodroma. Navegar de esta forma es mucho más sencillo, pero el viaje resulta más largo. Vemos que al prolongar la loxodroma, ésta se arrolla en espiral en torno al Polo, por lo que a un explorador de los mares árticos no le resultaría práctica. La proyección de Mercator **(280)** proporciona mapas que dan con mucha precisión los ángulos; los meridianos y los paralelos forman sobre el mapa una red rectangular, y, en ellos, las loxodromas son líneas rectas oblicuas. Puesto que una loxodroma corta con el mismo ángulo a todos los meridianos terrestres, lo mismo deberá suceder sobre el mapa. Dado que los meridianos forman en el mapa líneas rectas paralelas, la loxodroma corta con ángulo fijo a rectas paralelas del mapa. Por consiguiente, deben ser una línea recta.

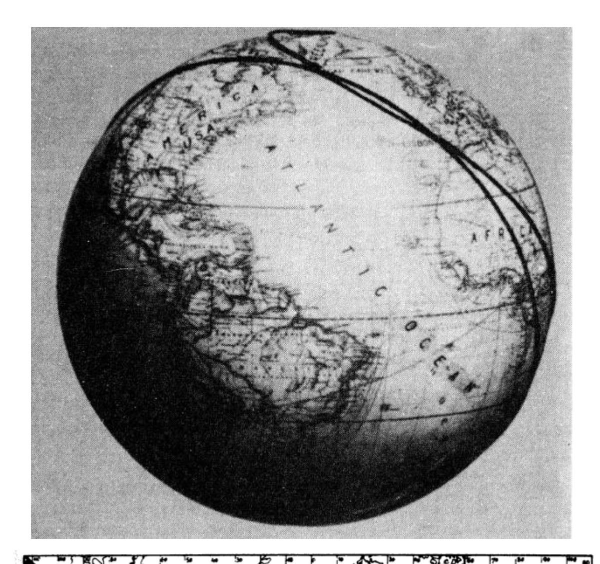


Fig. 279

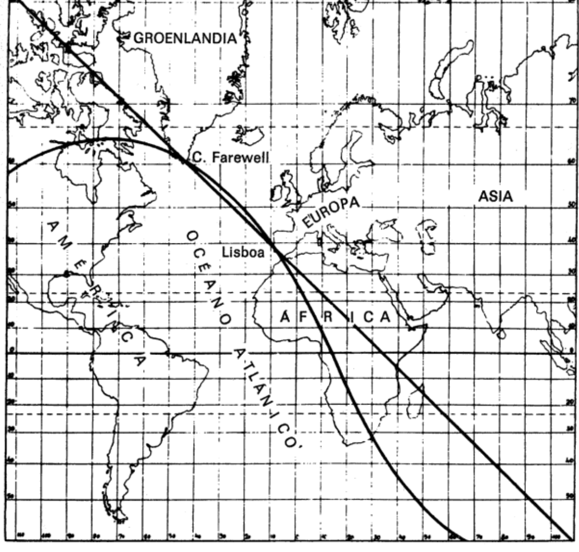


Fig. 280

La ortodroma, por el contrario, muestra aquí una inflexión, similar a una sinusoide **(304)**. Si proyectamos la superficie de la esfera sobre un plano tangente al Polo Norte, con centro de proyección en el Polo Sur (proyección esterográfica), obtenemos un mapa que representa, mediante círculos, los círculos terrestres, y que preserva ángulos **(281).** Así, pues, en este mapa, la ortodroma aparece como un círculo (de gran radio), y la loxodroma como una espiral logarítmica. Esta última proposición es consecuencia del hecho de que, sobre el mapa, los meridianos son, evidentemente, líneas rectas que concurren en el Polo, y de que la loxodroma sea un línea que forma con todos el mismo ángulo. Si proyectásemos el globo sobre un plano tangente en Nueva York, y desde un punto situado en las antípodas de Nueva York, los meridianos y paralelos darían **(159)**.

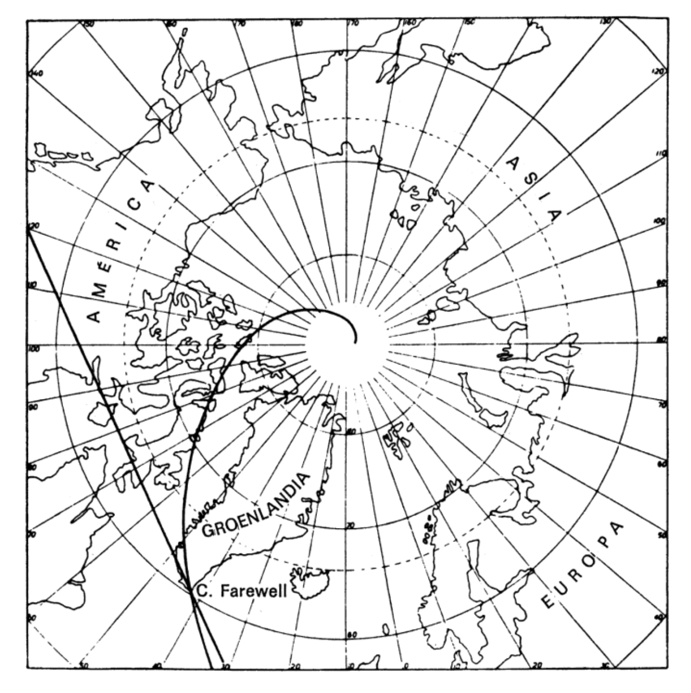


Fig. 281

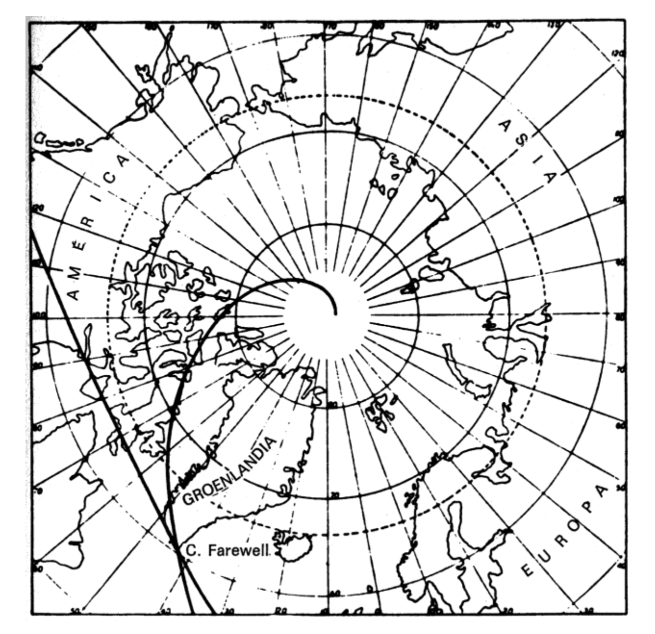


Fig. 282

Si proyectamos una esfera sobre un plano tangente en el Polo Norte desde el centro de la esfera (proyección gnómica), la ortodroma **(282)** se presentará como una línea recta. Por consiguiente, estos mapas son los más adecuados para la navegación aérea sobre regiones polares.



Fig. 283

Si colocamos una esfera en el interior de un cilindro que sea tangente a él a lo largo del Ecuador **(283),** y si proyectamos la esfera sobre la superficie cilíndrica, prolongando los planos de cada paralelo hasta cortar al cilindro,

y hacemos lo mismo con los planos correspondientes a todos los meridianos, obtendremos sobre el cilindro un mapa de la esfera **(284)**. Al abrir el cilindro a lo largo de una generatriz, y extenderlo sobre el plano, nos resulta un plano de la esfera, provisto de una red rectangular y recta de meridianos y paralelos. Este mapa tiene la peculiaridad (que ya conocía Arquímedes) de preservar las áreas. Entonces, si imaginamos la esfera recubierta por una delgada capa uniforme de pintura o de arcilla, y llevamos cada una de sus partículas al lugar que le corresponde en el cilindro, éste quedará uniformemente recubierto de materia; si la transferimos horizontalmente otra vez, llevándola al eje común del cilindro y la esfera, el eje quedará asimismo uniformemente recubierto de materia. Podríamos haberlo recubierto en seguida, sin la mediación del cilindro.

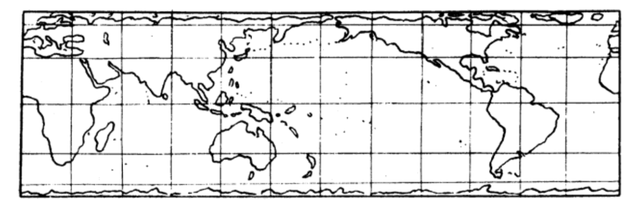


Fig. 284

No obstante, conseguiremos lo mismo de otro modo, en dos pasos: primero, proyectamos verticalmente la materia, por proyección paralela, cayendo libremente todas las partículas hasta el plano ecuatorial, o ascendiendo hasta él **(285A)**, y obtendremos una distribución circular **(285B)**, y después lo proyectamos nuevamente sobre un diámetro del Ecuador, obteniendo, evidentemente, una distribución uniforme **(285C)**. Así, pues, hemos hallado una distribución de materia sobre un disco, que da una proyección uniforme al ser proyectada sobre cualquier diámetro del disco. Este problema solamente tiene una solución.

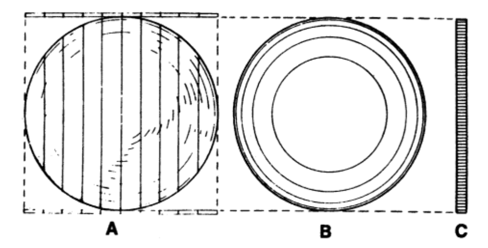


Fig. 285

Arquímedes sabía ya que el volumen de la esfera es el doble del volumen comprendido entre la esfera y el cilindro.

Para explicar la paradoja de la fecha sobre nuestro planeta, imaginemos el mapa **(284)** trazado sobre una lámina transparente, al que se le devuelve la forma cilíndrica pegándolo sobre un tambor. Como línea demarcatoria de la fecha usaremos uno de los meridianos que separan Asia de América, atravesando el Pacífico **(286)**.

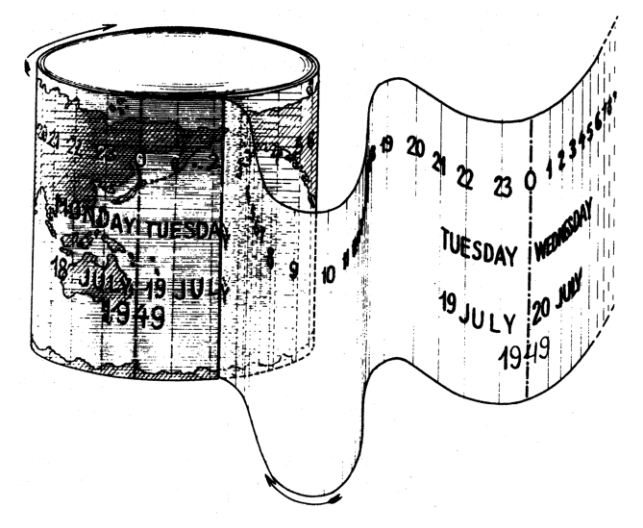


Fig. 286

La hora se muestra en forma de una cinta de papel que un oculto cilindro de madera arrastra, y que gira dentro de la Tierra inmóvil: la cinta atraviesa la superficie transparente del modelo a través de una rendija cortada a lo largo de la línea demarcatoria. La parte exterior de la cinta es el futuro; las vueltas, ya bobinadas y ocultas en el interior, son el pasado; y la porción visible a través del mapa transparente es «el día de hoy». Por lo tanto, la cinta es una especie de calendario que lleva días, meses y años. Los días están separados por líneas transversales, y se hallan divididos en horas. Las medianoches son líneas transversales trazadas sobre la cinta, que separan los días: al cambiar la fecha a medianoche, siempre vemos sobre la Tierra dos líneas de fecha: la línea fija y la de la medianoche. Así, pues, vemos aquí el martes, que se extiende desde la línea fija hasta la móvil, situada al

oeste de la línea fija; al rebasarla hacia el oeste sigue siendo lunes, que se extiende hacia el oeste desde la línea fija, de retorno hasta la línea fija. Conforme la línea móvil se desplaza hacia el oeste, va aumentando el área correspondiente al martes y decreciendo la del lunes. Finalmente, hay un momento en que reina el martes sobre todo el mundo. Pero esta situación apenas permanece porque la línea móvil, que se desplaza hacia el oeste a velocidad constante, deja atrás la línea fija de cambio de fecha, creando entre sí y ésta una estrecha banda correspondiente al nuevo día: ha llegado el miércoles. El declinar del martes comienza, y el juego continúa indefinidamente.

Si la Tierra tuviera forma cilíndrica, sería posible trazar círculos paralelos, y, perpendicularmente a ellos, líneas rectas, que serían los meridianos. Supongamos que estas líneas fueran visibles sobre tierras y mares: se simplificaría mucho la navegación, porque, sobre un cilindro, las líneas más cortas (que son hélices) cortan a paralelos y meridianos en ángulo fijo. En un planeta de forma esférica es imposible trazar una red semejante que cortase a cada círculo máximo en ángulos constantes. Además del cilindro, existen otros cuerpos para los cuales son posibles tales redes perfeccionadas. Como sabemos, es posible cortar un cono y desarrollarlo sobre un plano; sobre éste, las líneas más cortas se convierten en líneas rectas. Ahora bien, sobre un plano, una red cuadrada ordinaria, como la de **(15)** tiene la siguiente propiedad: toda línea recta corta a los meridianos y a los paralelos en un ángulo constante.

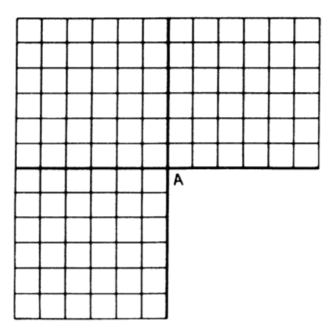


Fig. 287

Aplicando esta red junto con el plano sobre un cono, el problema quedaría resuelto. Pero queda todavía por superar una dificultad, a saber, que para poder conectar las líneas a lo largo de la costura, sin que se formen

ángulos en los puntos de unión, tenemos que elegir cuidadosamente los cortes antes de que empecemos a cerrar el cono. Podemos elegir **(287)** como ángulo *A* en el vértice los valores 90°, 180° o 270°. Surgen, pues, tres conos diferentes. El primero **(288)** tiene una red formada por una sola familia de líneas. Cada línea intersecta a cualquiera de las demás, y también a sí misma, una vez y solamente una vez.

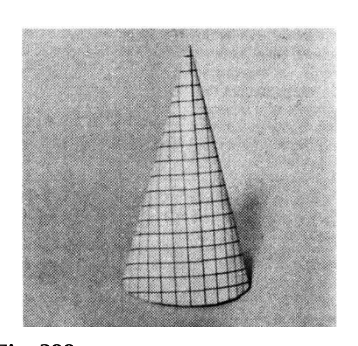


Fig. 288

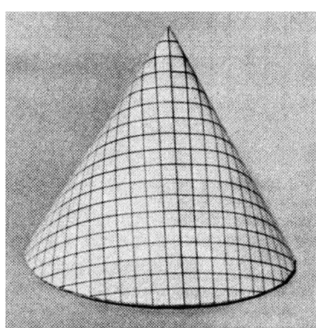


Fig. 289

El segundo cono **(289)** tiene una red formada por paralelos y meridianos, en la cual cada paralelo interseca a cada meridiano una vez y sólo una vez.

La red correspondiente al tercer cono **(290)** consta de tres familias de líneas: las llamaremos paralelos, meridianos, y *paradianos.* Cada familia interseca a las otras dos, y por cada punto del cono pasan líneas de dos familias. Vemos en las fotografías **(291, 292, 293)** cómo se cortan a sí mismas las líneas de cada red; el vértice del cono apunta hacia el observador.

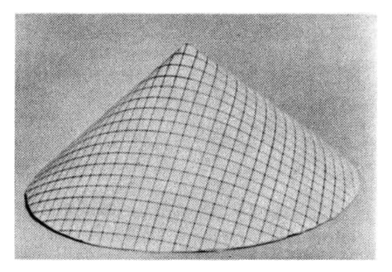


Fig. 290

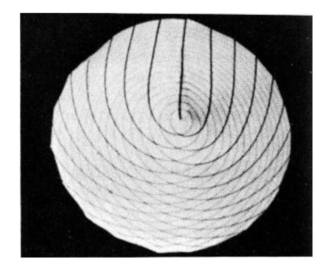


Fig. 291

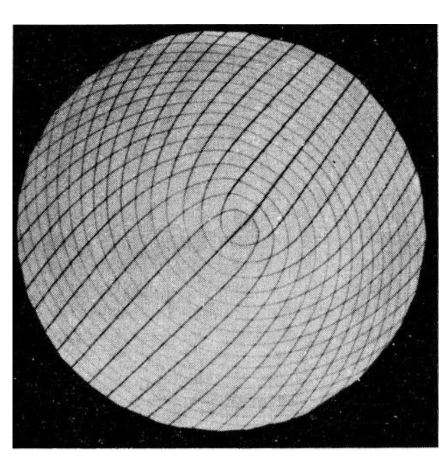


Fig. 292

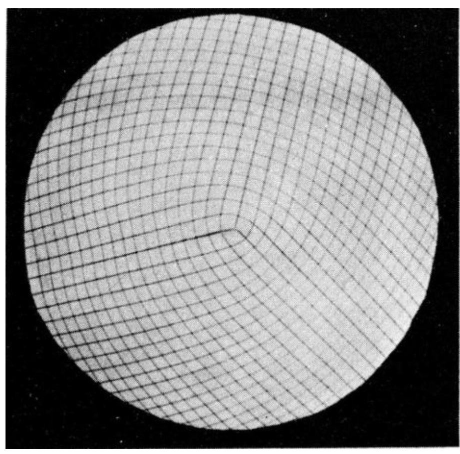


Fig. 293

10. Ardillas, tornillos, velas, tonadillas y sombras

Resulta divertido ver ardillas correr una en pos de otra en torno al tronco de un árbol: sus trayectorias son hélices. En efecto, para hallar el camino más corto sobre un cilindro lo cortaremos a lo largo de una línea recta **(294)** y lo extenderemos sobre una superficie plana (como en el mapa **284)**.

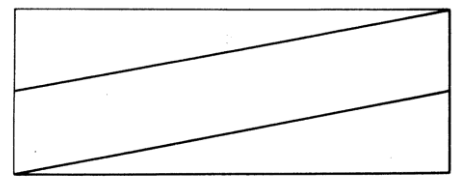


Fig. 294

El camino más corto entre dos puntos cualesquiera dará sobre el dibujo una línea recta; al volver a arrollar el cilindro, esta línea se convierte en una hélice **(295).** La proyección de un tornillo **(296)** muestra en ciertos lugares puntos cuspidales.

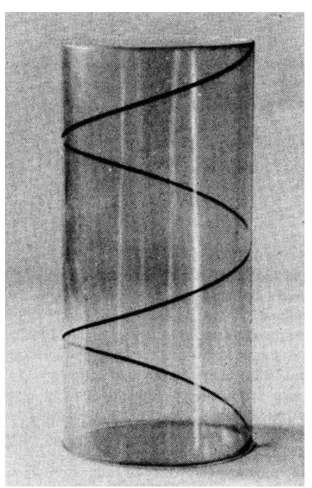


Fig. 295

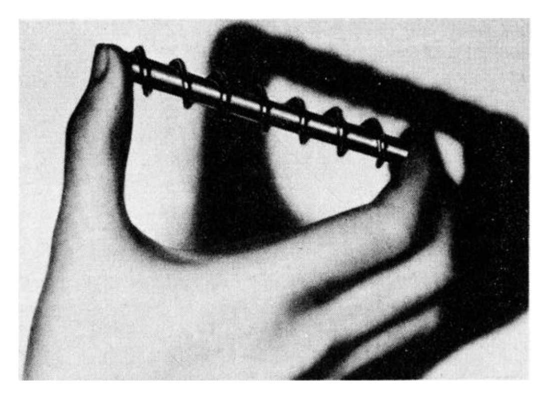


Fig. 296

Una de las propiedades que tienen todas las curvas alabeadas es la que, a partir de uno cualquiera de sus puntos, podemos, mediante una proyección adecuada, obtener tales cúspides **(297)**. El filete de un tornillo ordinario es una hélice.

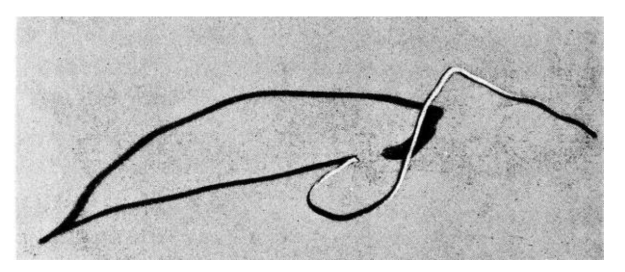


Fig. 297

El llamado «tornillo sin fin» **(298)** transforma un movimiento circular uniforme en un movimiento lineal uniforme. Si un segmento de longitud dada se desliza con un extremo apoyado sobre una hélice, mientras que el otro extremo lo hace a lo largo del eje, se genera una superficie helicoidal **(299)**. Es posible obtener esta superficie haciendo girar uniformemente un brazo en torno a una varilla, al tiempo que ésta avanza, a velocidad constante, en su propia dirección. Esta superficie es la única superficie, no de revolución, capaz de deslizarse sobre sí misma. La esfera, el cilindro y el plano son superficies de revolución: no sólo pueden resbalar sobre sí mismas, sino que, además, lo hacen de tal modo que un punto arbitrario se traslada sobre una pista cualquiera trazada sobre ellas. Así, pues, estas cuatro

superficies desempeñarán siempre un papel dominante en la estructura de las máquinas.

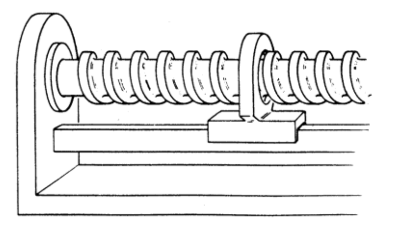


Fig. 298

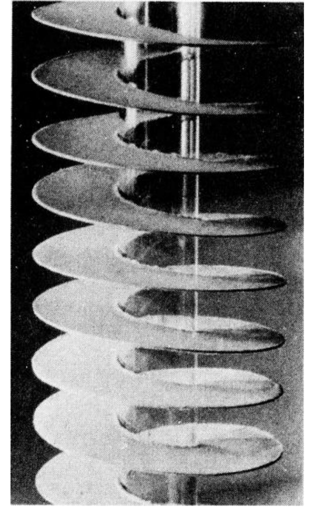


Fig. 299

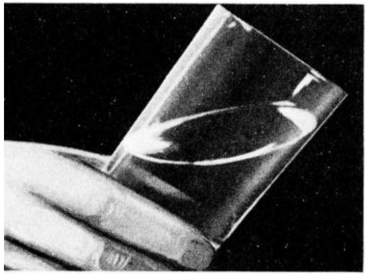


Fig. 300

Al cortar un cilindro con un plano se obtiene una elipse **(300).** Sería erróneo suponer que, por estar contenida en un plano, la elipse corresponde al camino mínimo sobre el cilindro. Arrollemos un papel en torno a una vela **(301),** cortémosla al bies **(302)** con un cuchillo bien afilado **(303),** y, finalmente, desenrollemos el papel **(304):** obtenemos una sinusoide.

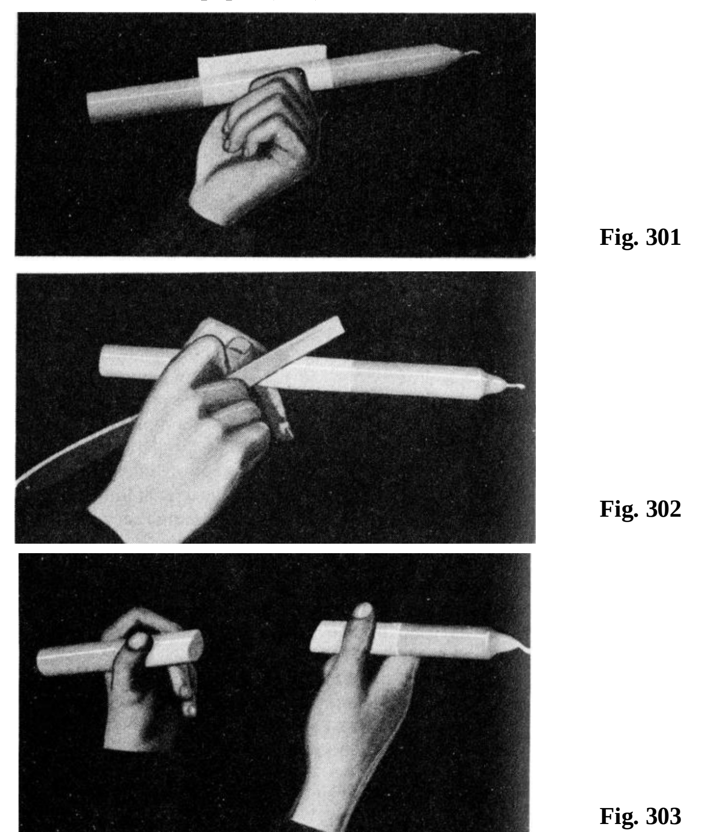


Fig. 301

Fig. 302

Fig. 303

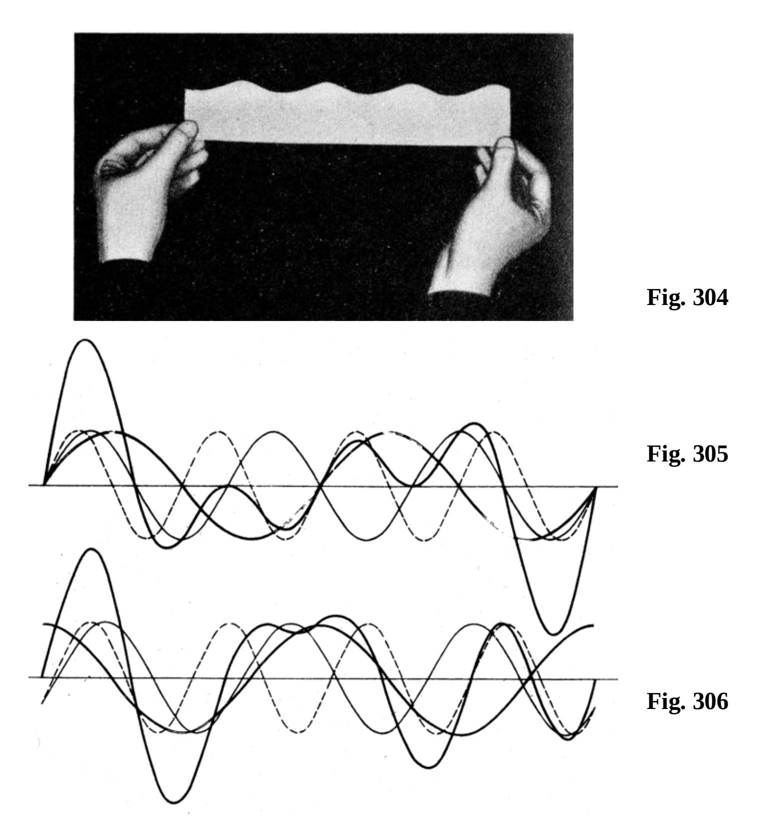


Fig. 304

Fig. 305

Fig. 306

Por sumatoria de sinusoides obtendremos cualquier curva. Las líneas trazadas por la aguja de grabación sobre el cilindro de un fonógrafo al registrar una nota pura se convierten en sinusoides al extenderlas sobre un plano. Tenemos, en **(305),** tres sinusoides de amplitudes iguales, es decir, de iguales alturas máximas: corresponden a las tres componentes del acorde do-sol-do. La línea gruesa es la suma de tres sinusoides: es la curva grabada en el fonógrafo por el acorde. Pero en diferentes circunstancias, el mismo acorde produce **(306)** otra línea. Vemos en nuestro dibujo que las vibraciones de las notas componentes no comienzan simultáneamente. Dado que

nuestro oído percibe tan sólo la intensidad del sonido, que únicamente depende de la amplitud, y el tono y el «color» de la melodía, que están determinadas por la frecuencia de las vibraciones, mientras que es incapaz de percibir las crestas y valles de las ondas acústicas, percibe siempre el mismo sonido continuo, cualquiera que sea el instante en que las vibraciones hayan comenzado. En ambos casos, a pesar de las diferencias de configuración geométrica de las curvas registradas, la impresión acústica es la misma.

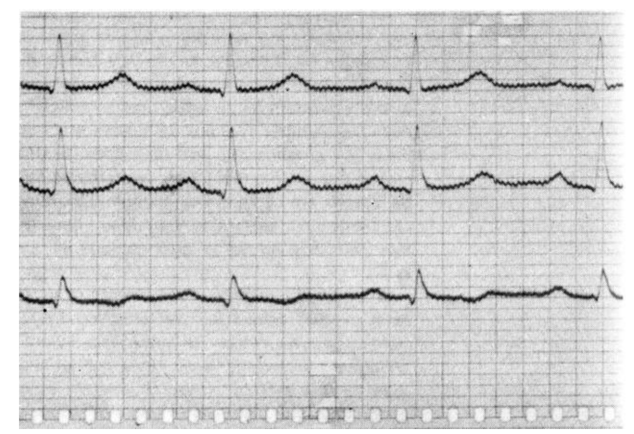


Fig. 307

Hay no sólo dos, sino una infinidad de grabaciones diferentes que producen la misma impresión acústica, la que se obtendría del acorde do-sol-do alto. Tal hecho se considera demostrativo de que nuestro oído descompone los sonidos en componentes sinusoidales (armónicos), y, al volver a formar en el sistema cerebro-nervioso la combinación de éstos, pierde algunas características del verdadero proceso físico del sonido. La distribución de la suma sólo depende de la distribución de las componentes.

Un electrocardiograma **(307)** muestra las vibraciones eléctricas correspondientes a la actividad periódica del músculo cardíaco. Su análisis es difícil. Imaginemos representada en cada momento, mediante una flecha (los matemáticos la llaman un vector), la fuerza eléctrica. Al ir colocándolas a tope, origen con extremo, las flechas correspondientes a cada latido circunscriben una curva cerrada, alabeada, en el espacio **(308)**. Esta curva espacial se traza sobre el papel mediante un adecuado mecanismo de registro, de

conformidad con las reglas de la geometría descriptiva, a fin de dar una idea de la verdadera curva.

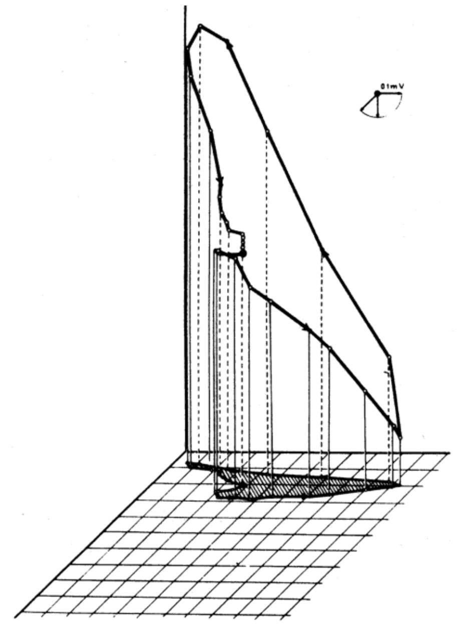


Fig. 308

Al pasear por una playa arenosa, casi todo el mundo, si va calzado,- prefiere ir por la franja mojada, ya que ésta es más dura y lisa que la arena seca, y, por lo tanto, hace más fácil y agradable la marcha. Por otra parte, para evitar que los zapatos y los calcetines se empapen, es preciso prestar constante atención a las olitas que lamen la franja. Al cabo de pocos minutos, este continuo volver la cabeza resulta molesto y desagradable. Hay, sin embargo, un remedio **(309)**: en lugar de mirar hacia un costado se mira directamente al frente, de modo que constantemente vemos el contorno del agua. Caminaremos, pues, en dirección tangencial a él, es decir, a lo largo de una recta que toque al borde del agua en un sólo punto, sin cortarlo. Aunque esta dirección es variable, pero el punto de contacto se encuentra lo bastante alejado como para que las variaciones sean pequeñas y fáciles de

seguir, no es necesario ni mirar continuamente hacia la izquierda, ni saltar bruscamente hacia la derecha.

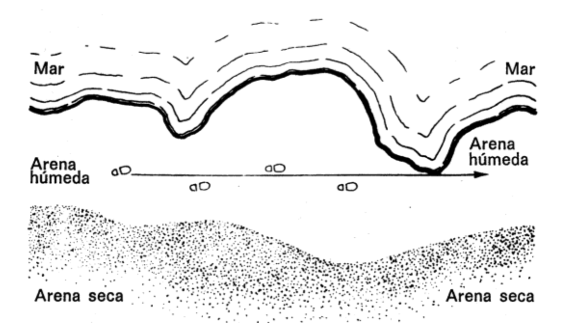


Fig. 309

El fundamento de la conducta que aquí recomiendo (tras haberla puesto en práctica) es el llamado «principio ergódico»: la distribución de las lenguas de agua que lamen la orilla en un punto fijo, observada durante largo tiempo, es la misma que las distribuciones que muestran en un momento dado porciones grandes del borde del agua. El principio en cuestión estriba en la identidad de la distribución temporal en un punto y la espacial en un instante. Para aplicarla a este caso, el caminante tiene que limitar su observación a la porción de orilla que va a recorrer en el próximo minuto: en casi todos los casos, esta táctica le mantiene en zona segura sin llevarle fuera de la franja mojada de la playa.

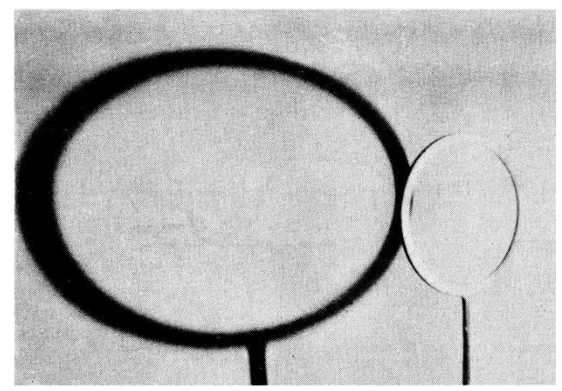


Fig. 310

Es posible obtener las tres curvas más conocidas, es decir, la elipse, la parábola y la hipérbola, cortando de modo adecuado, un cono mediante un plano. Consiguientemente, podemos obtenerlas como sombras de un disco circular. Al colocar el disco de modo que-su sombra quepa por completo en la pared, obtenemos una elipse **(310)**; cuando parte de él no proyecta sombra en la pared, una hipérbola **(311)**; y cuando solamente es un punto el situado de tal modo que no proyecte sombra en la pared, ésta es una parábola) **(312).** Una pelota que descanse sobre la mesa, iluminada desde lo alto, lanza una sombra elíptica, y el punto de apoyo es uno de los focos de la elipse.

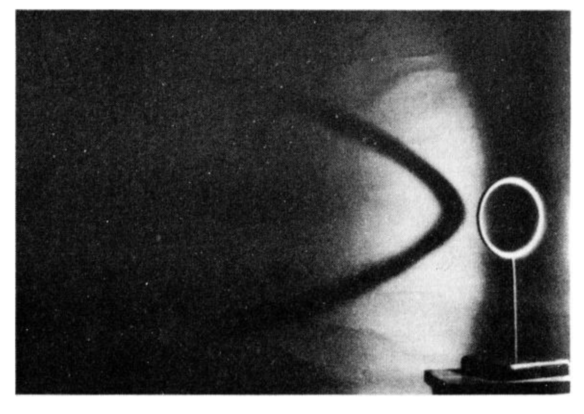


Fig. 311

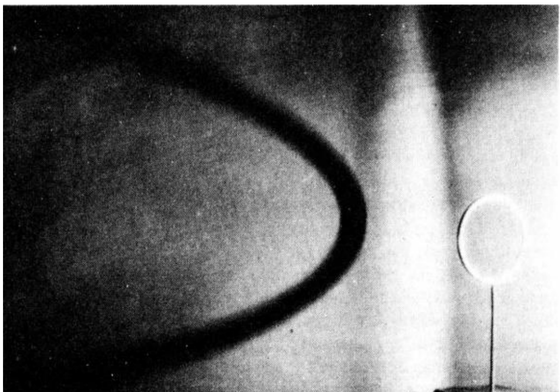


Fig. 312

Los planetas describen órbitas elípticas. El Sol se encuentra en uno de los focos. El radio Sol-planeta barre la misma área **(313)** todos los días (y también, en cada hora), a pesar de que como insinúa el dibujo, la Tierra no recorra todos los meses una misma distancia.

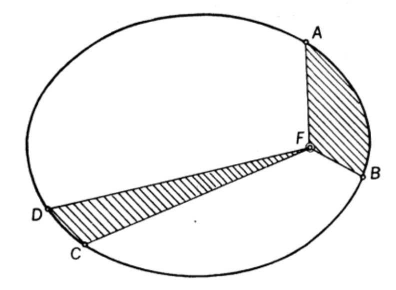


Fig. 313

En una mesa de billar elíptica **(314),** la trayectoria de una bola, disparada de modo que no pase entre los focos, será una línea quebrada, cuyos tramos rectilíneos son todos tangentes a una elipse más pequeña con los mismos focos. Si la tacada inicial hace pasar la bola entre los focos **(315),** volverá a pasar entre ellos al rebotar en la banda. Por lo tanto, continuará siempre de igual modo; su trayectoria consistirá en tangentes a una hipérbola con iguales focos que la mesa. Si la bola pasa por uno de los focos, tras rebotar en la banda **(316)** pasará por el otro foco; su trayectoria se aproxima mucho al eje de la elipse al cabo de unos cuantos rebotes.

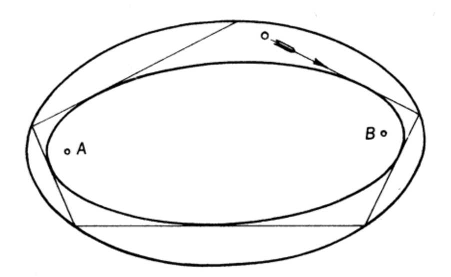


Fig. 314

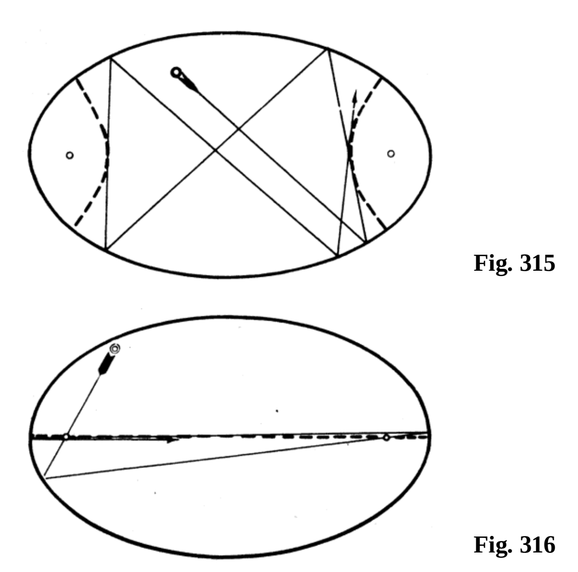


Fig. 315

Fig. 316

11. Superficies regladas, la cadena, el carrito de arrastre y la superficie minimalista

Todas las líneas que es posible trazarse sobre la esfera son curvas; pero existen superficies curvas que son tejidos de líneas rectas. El cilindro y el cono, por ejemplo, son superficies así. Hemos visto ya el resultado de hacer girar un cubo **(202)**, cuyas aristas se deslizan por el interior de dos conos y de un hiperboloide de revolución de una sola hoja.

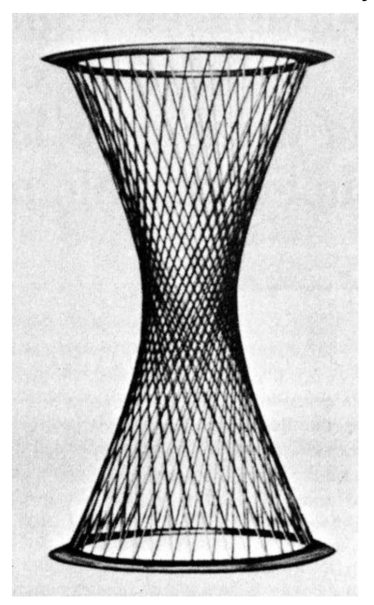


Fig. 317

El hiperboloide general **(317)** de una sola hoja es reglado, es decir, es un entretejido de dos familias de líneas rectas y cuando lo miramos desde arriba vemos **(318)** una elipse con sus tangentes. El paraboloide de revolución se genera al hacer girar una parábola en torno a su eje de simetría. Los reflectores de los faros delanteros de los automóviles tienen, casi siempre, forma

de paraboloide. Todas las secciones de un paraboloide así, producidas por planos paralelos al aje, son parábolas, y todas estas parábolas son congruentes. Por lo tanto, el paraboloide de revolución es una trama compuesta por una infinidad de familias de curvas planas congruentes. La esfera y el plano tienen la misma propiedad. (¿Existen otros ejemplos?)

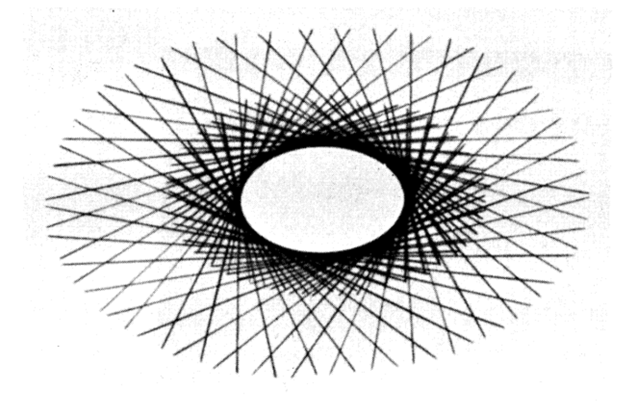


Fig. 318

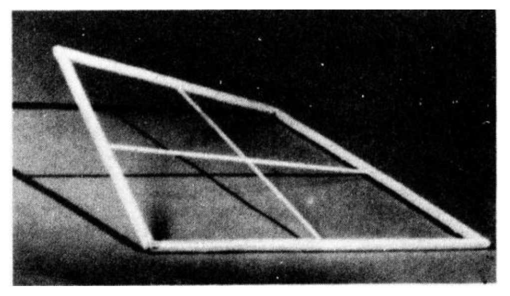


Fig. 319

Un cuadrilátero alabeado **(319)** cuyos vértices estén cargados con pesos iguales tiene un centro de gravedad que es posible hallar tomando primero el centro de gravedad de un par de masas, después, el baricentro del otro par, y después, el baricentro de estos dos baricentros (tras haberlos dotado con la suma de las masas que ellos representan). Tal proceder da el punto medio de la línea que conecta los puntos medios de lados opuestos. Como es posible comenzar con el otro par de puntos opuestos, y como, evidentemente, al hacerlo así llegaríamos al mismo centro de gravedad, se descubrirá

que las rectas que conectan los puntos medios de lados opuestos de un cuadrilátero cualquiera se intersecan (en el punto medio) la una a la otra. Si los pesos fueran desiguales (e. g.: *a, b, c, d*) pero proporcionales (*a:b* = *c:d*) obtenemos rectas que dividen a uno de los pares de lados opuestos en la razón *a*:*b*, y, al otro par, en la razón *b:d*. Estas rectas también se intersecan una a otra, como se demuestra por el mismo razonamiento. Cambiemos ahora los pesos *a, d, c, d,* conservando, no obstante, la proporcionalidad: obtenemos dos grupos de rectas, que forman una superficie entretejida **(320)** sobre el marco determinado por el cuadrilátero (la fotografía muestra también un borde de metal que carece de importancia. Para definir el cuadrilátero basta elegir cuatro hilos en el modelo). Vista de un costado, esta superficie **(321)** recuerda una silla de montar. Se la conoce como paraboloide hiperbólico.

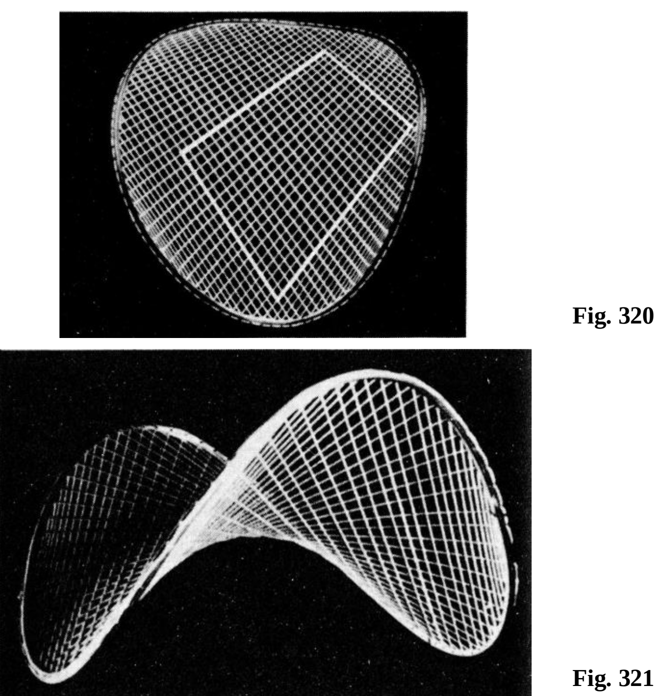


Fig. 320

Fig. 321

El dibujo **(322)** muestra seis varillas de igual longitud, que podrían servir como modelo de un tetraedro regular de caras transparentes. Cada varilla está dividida en 16 segmentos iguales mediante 15 nodos, siendo los nodos los puntos en los cuales.se sujetan los hilos. El modelo está formado por tres pares de varillas opuestas; cada varilla está conectada con su opuesta mediante 15 hilos. El lector puede imaginar 1.000 nodos en lugar de quince: el tejido resultante, formado por 3.000 hilillos, dividiría al tetraedro en ocho partes, cuatro abiertas y cuatro cerradas. El lector podría comparar el volumen de las partes con el volumen del tetraedro. Es preciso advertir que el retículo cuadrangular **(323)** es una ilusión óptica, a diferencia del que muestran las fotos **(320, 321),** donde es real.

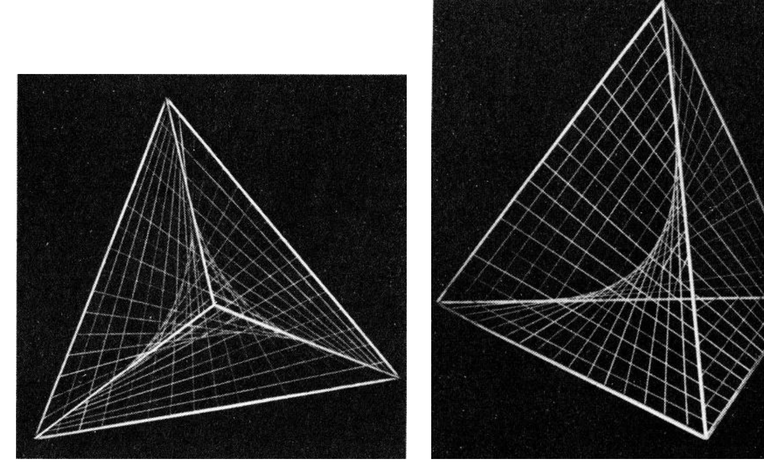


Fig. 322 **Fig. 323**

Un método sencillo para obtener superficies que contengan familias de líneas rectas consiste en tomar una curva plana de alambre fuerte, a la que se han soldado tangencialmente varillas rectas, y alabearla. Obtenemos una superficie de dos hojas **(324)** consistente en un único grupo de líneas rectas; la curva define una línea filosa que conecta las dos hojas, ninguna de las cuales va más allá de esta arista.

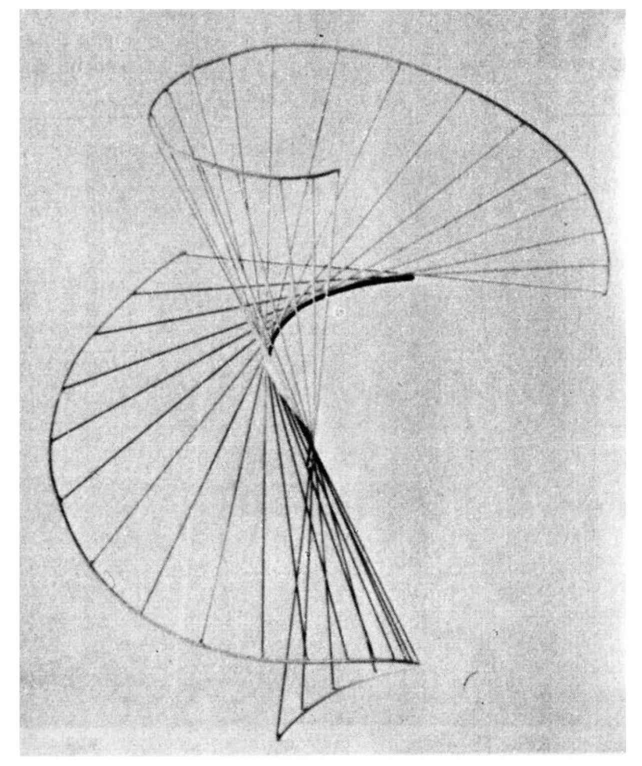


Fig. 324

Si tomamos dos anillos de alambre con el mismo eje (colocados, por lo tanto, como si fuesen las bases superior e inferior de un cono truncado), y los sumergimos en agua jabonosa, se generará una superficie de revolución **(325)**, que será la superficie de área mínima que se pueda tender entre los dos aros fijos, porque una película jabonosa se hace a sí misma lo más pequeña posible. La fotografía muestra tanto la superficie propiamente dicha como su sombra proyectada en la pared. Las líneas equivalentes a paralelos son círculos; su línea meridiana, que es claramente visible como contorno superior de la sombra sobre la pared, se amplía mediante un proyector.

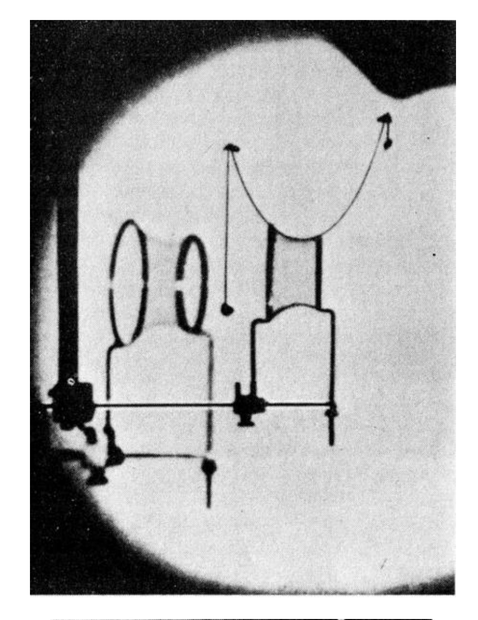


Fig. 325

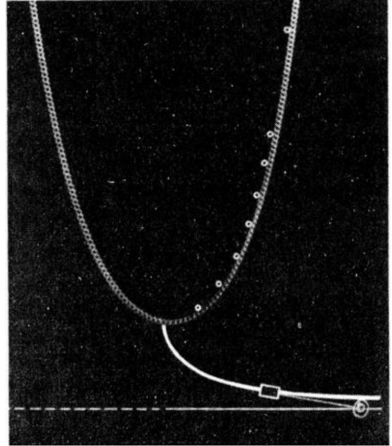


Fig. 326

Tomemos entonces su fotografía juntamente con la de una cadena colgada sobre la pantalla, y veremos claramente que su forma es la de una catenaria, es decir, que tiene el aspecto de una cadena colgada de dos clavos **(326)**. La ecuación de la catenaria es $y = a(b^x+b^{-x})$. Tomando adecuadamente las unidades horizontal y vertical, sería $y = 10^x+10^{-x}$.

Para retornar a la superficie mínima de película jabonosa, nos es suficiente hacer girar la catenaria en torno al eje de abscisas. Ahora bien, si nos dieran la cadena, no veríamos eje alguno. Para hallarlo hemos de cortar la cadena por su punto más bajo y estirarla. Imaginemos la cadena suspendida en la pared, y que, por el lado cóncavo de la cadena, una serie de clavos impide que la cadena se mueva hacia dentro de esa región; bastaría entonces dejar pender la cadena por acción de la gravedad. El extremo por donde se ha cortado la cadena describirá la misma trayectoria que el carrito de juguete **(327)** de un niño que fuera caminando a lo largo del bordillo de la acera, arrastrando tras de sí un carrito, que rueda por la calle. El carrito jamás llegaría a alcanzar el bordillo, aunque se acercaría indefinidamente a él. El bordillo sería el eje que estamos buscando. Por consiguiente, lo determinaremos por la condición de ser la más alta de todas las líneas horizontales que no puede ser tocada por el extremo libre de la cadena al cortarla por su punto más bajo, y dejarla caer libremente.

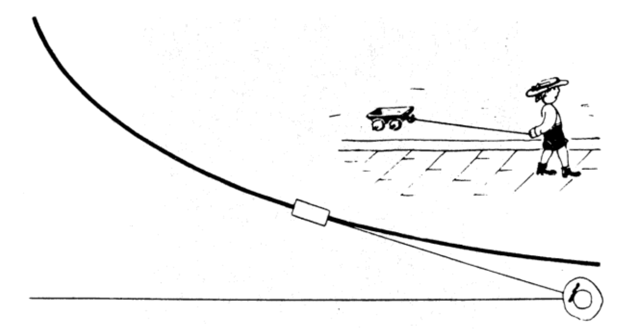


Fig. 327

Podemos hacer girar la tractriz descrita por el juguete (o por la cadena desarrollada) en torno a la recta por la que avanza el niño (es decir, en torno al mismo eje que hemos hallado para la catenaria), lo que engendra una nueva superficie de revolución, que tiene la propiedad de que una lámina

flexible que sea adaptada a ella se desplaza por toda su superficie, doblándose sin estirarla, adaptándose siempre a la superficie, y sin arrugarse nunca. Esta propiedad la comparten la esfera, el cilindro, el plano y todas las superficies que resulten de plegar un plano. Nuestra superficie tiene, sin embargo, la peculiaridad de que su curvatura es negativa; cada uno de sus puntos es punto de ensilladura. Esta curvatura es la misma en todos sus puntos, lo mismo que en la esfera, hecho que constataremos haciendo deslizarse la lámina a lo largo de sí misma. Por este motivo, la superficie tractisoidal es muchas veces denominada «pseudoesfera», y también, «antiesfera».

12. Revisión de los sólidos platónicos, recorrido de puentes, nudos, coloreado de mapas, y peinados

Ya hemos enunciado anteriormente que tan sólo existen cinco poliedros regulares, los llamados cuerpos platónicos, pero no hemos dado ninguna razón para que así sea. Tracemos sobre una esfera una figura que conste de *L* líneas, *V* vértices y *C* caras. Dicho de otro modo, dividamos el globo en C países (consideraremos como territorios los mares y océanos). Tendremos entonces $V+C = L+2$, sea cual fuere la situación política mundial. No es difícil verificar esta regla, que fue descubierta por Euler, el gran matemático suizo. Comencemos con un solo vértice **(328)**: tomando la regla al pie de la letra vemos que es verdadera en este caso, porque hay un solo vértice ($V = 1$), una cara ($C = 1$) y ninguna línea ($L = 0$): $1+1 = 0+2$. Dibujando una línea desde el vértice **(329)**, obtenemos una nueva división de la esfera, y la regla sigue siendo evidentemente cierta, pues tenemos $V = 2$, $C = 1$ y $L = 1$ ($2+1 = 1+2$). Supongamos ahora que tenemos una figura cualquiera para la cual sea verdadera la regla **(330)**, y tracemos una nueva línea que conecte **(331)**, **(332)** uno de los vértices con alguno de los ya existentes. De este modo, el número de vértices aumentaría en 0, el número de caras, en 1, y el número de líneas en 1. Es decir, se incrementarían en 1 los miembros izquierdo y derecho de la regla de Euler, y ésta será válida para la nueva división si lo era ya para la antigua. Si la nueva línea acaba en un vértice nuevo **(333)**, el incremento del número de vértices es 1, el de caras, 0 y el de líneas, 1. El razonamiento anterior sigue siendo válido. Dado que podemos dibujar sobre la esfera una figura cualquiera, partiendo de un vértice y trazando después una tras otra las líneas necesarias, la regla de Euler está demostrada. (¿Qué relación tiene con los dominós?). De entre todas las posibles divisiones de la esfera, las regulares, que son las que aquí interesan, se caracterizan por tener todas las caras *C* el mismo número *c* de líneas que las limiten, y por concurrir el mismo número *v* de líneas en cada vértice. Si hay *C* caras, el producto *Cc* da el número total de líneas, estando cada línea contada dos *veces*, pues cada línea pertenece a dos caras. Así, pues, $2L = Cc$.

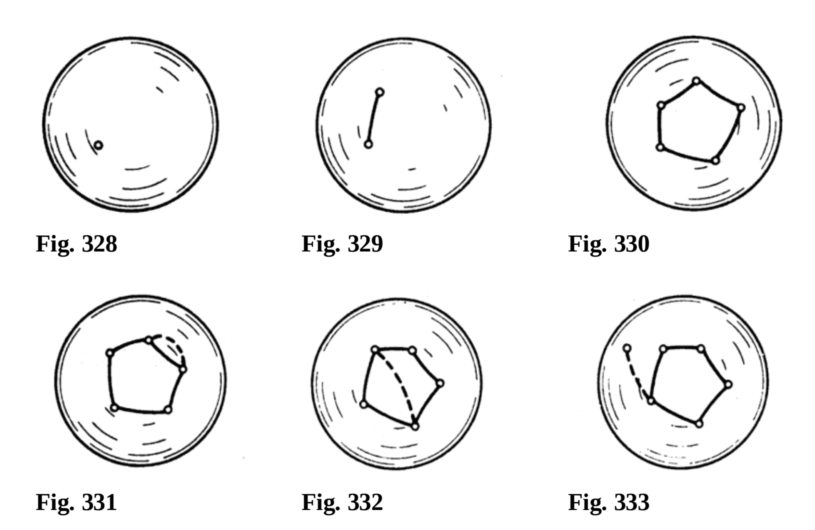


Fig. 328 **Fig. 329** **Fig. 330**

Fig. 331 **Fig. 332** **Fig. 333**

Podemos también contar las líneas vértice por vértice. Se tiene así $2L = Vv$. Por consiguiente tenemos:

$$C = 2L/1\ ,\quad V = 2L/v\ ;$$

y sustituyendo V y C en la fórmula de Euler por las fracciones anteriores, se tiene:

$$2L/1+2L/c = L+2$$

que también podemos escribir como:

$$\text{(E)}\qquad 1/v+1/c = 1/L+1/2$$

La forma más sencilla de satisfacer esta ecuación es poner, o bien $c = 2$, $v = L$, o bien $v = 2$, $c = L$.

La primera hipótesis da $C = L$, $V = 2$. Así, pues, tenemos solamente dos vértices, y tantas caras como líneas. Dado que $V = L$, cada línea pertenece a cada vértice, y que $c = 2$, cada cara está limitada por dos líneas. Tenemos así dos polos **(334)** unidos por L meridianos; el número de meridianos es arbitrario (L = 1, 2, 3,...). La segunda hipótesis da $V = L$, C = 2. Tenemos

ahora solamente dos caras y tantos vértices como líneas: dado que $c = L$, cada línea pertenece a cada cara, es decir, la frontera común de las dos caras está compuesta por L líneas y L vértices. Por lo tanto, el globo está ahora dividido **(335)** en dos hemisferios separados por un L-gono; el número L es arbitrario. Llamaremos excepcionales a estos dos tipos de mapas. Fijémonos en que el caso $c = 2$, $v = 2$ pertenece a ambos **(336).**

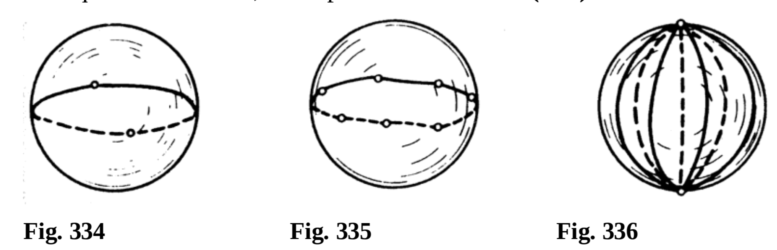


Fig. 334 **Fig. 335** **Fig. 336**

Volvamos a la ecuación general (E), y probemos con $L = 1$ veremos fácilmente que las únicas soluciones que obtenemos son las excepcionales, v = 1, c = 2 (una línea cerrada, con un vértice sitúa do en ella), o v = 2, c= **1,** ya encontrada **(329)**. Lo mismo es válido para L = 2, que tan sólo da la solución c = v = 2 mencionada anteriormente. Así, pues, para obtener nuevas divisiones de la esfera tenemos que suponer L = 3, 4, 5,...

El segundo miembro de (E) se hace entonces menor que 1, y dado que siempre es menor que 1/2, tenemos

$$1/2 < 1/c+1/v < 1$$

El valor $c = 1$ es incompatible con la igualdad del segundo miembro, mientras que el valor $c = 2$ da el caso excepcional de **(334)**, ya discutido. Comencemos entonces con $c = 3$. Aquí sólo podemos ensayar los valores $v = 3$, 4 y 5, porque $v = 1$ es incompatible con la desigualdad derecha; $v = 2$ corresponde a un caso examinado ya; y $v = 6$ o más le da a la suma $l/c+l/v = 1/3+1/v$ un valor 1/2 o menor, contrariamente a la desigualdad izquierda. El mismo razonamiento muestra que al poner c mayor que 3 nos vemos limitados a $v = 3$, 4 o 5, en razón de la desigualdad izquierda. Dado que podemos comenzar con v (la cual debe ser 3 como mínimo para evitar casos imposibles o excepcionales), vemos que c está limitada a 3, 4 o 5. Al combinar los dos conjuntos 3, 4 y 5 tenemos 3×3 = 9 casos. Cuatro de ellos

$c = 4, v = 4;$ $c = 5, v = 4;$
$c = 4, v = 5;$ $c = 5, v = 5;$

son imposibles, a causa de la acotación izquierda: 1/4+1/4 = 1/2, que ya es demasiado pequeño. Quedan cinco casos por estudiar:

(a) $c = 3$, $v = 3$. En este caso, (E) nos da
$1/3+1/3-1/2 = 1/L$, $L = 6$, $C = 4$, $V = 4$

(b) $c = 3$, $v = 4$: (E) nos da ahora
$1/3+1/4-1/2 = 1/L$, $L = 12$, $C = 8$, $V = 6$

(c) $c = 3$, $v = 5$; en este caso, (E) nos da
$L = 30$, $C = 20$, $V = 12$

(d) $c = 4$, $v = 4$; ahora (E) da
$L = 12$, $C = 6$, $V = 8$

(e) $c = 5$, $v = 3$; (E) da en este caso
$L = 30$, $C = 12$, $V = 20$.

Hemos hallado finalmente las cinco divisiones regulares de la esfera. Las soluciones excepcionales no producen poliedros, en el sentido general del término, porque no tenemos ni polígonos de dos lados rectos, ni poliedros de dos caras planas. Los cinco sólidos platónicos, correspondientes a los casos (a), (b), (c), (d), y (e) son los únicos poliedros regulares: tetraedro, icosaedro, cubo y dodecaedro.

Démonos cuenta de que hemos demostrado mucho más de lo prometido: hemos hallado todos los mapas regulares del globo, sean cuales fueren sus fronteras, sin hacer hipótesis alguna acerca de que éstas sean arcos circulares o líneas tortuosas. Además, la forma exacta del globo carece de importancia para nuestros asertos, que son ciertos tanto para un planeta de forma esférica como para un planeta cúbico o lenticular.

Estas cosas nos recuerdan el viejo problema de trazar figuras sin levantar el lápiz del papel, y pasando una y solamente una vez por cada punto. Ello es posible para el dibujo **(337)**. Euler se planteó la cuestión de qué figuras podían trazarse de este modo cuando le propusieron el problema de los puentes de Königsberg **(338)**.

Fig. 337

Fig. 338

Hay siete de ellos, y la cuestión es ésta: ¿es posible pasar uno tras otro por todos ellos, sin pasar más de una vez por cada uno? Si denotamos la isla por *A*, la ribera izquierda por *B*, la derecha por *C*, y por *D* la región situada entre los dos brazos del curso superior, nuestra tarea consistirá en dibujar, con una pasada del lápiz, una cierta figura **(339)** compuesta por siete líneas.

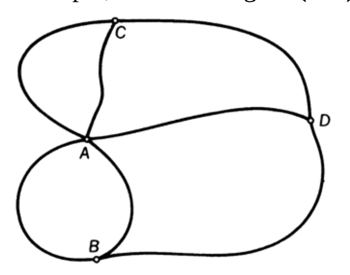


Fig. 339

La tarea, sin embargo, es imposible, pues si elegimos un punto dado cualquiera como punto de partida, y otro cualquiera como meta, tendríamos que pasar, por el camino, a través de al menos dos puntos *A, B, C, D* (es decir, a través de aquellos que no son puntos iniciales ni finales). Cada vez que pasamos a través de un cierto punto trazamos un camino de llegada y uno de salida, es decir, dos caminos, y como en cada punto concurren tres o cinco líneas, algunas de ellas habrán de quedar sin dibujar. Por otra parte, toda figura en la que concurren en cada punto un número par de líneas, o con dos puntos excepcionales, en los cuales se permite que el número sea impar, puede ser trazada de una sola pasada, si sus partes están conectadas. Para demostrar que así ocurre en el caso de que todos los puntos sean pares, partamos de un punto arbitrario. Dado que en todo punto ha de haber un camino de salida siempre que exista uno de llegada, la ruta ha de terminar en el punto de partida, sea cual fuere la táctica que hayamos elegido. Consideremos el camino entero como una curva cerrada: si quedan partes de la figura que no han sido aún visitadas, tendrán que estar conectadas con los caminos en uno de sus puntos, *A*. De los caminos que concurren en *A*, un número par pertenece al camino antiguo, y un número par a las partes restantes. Traslademonos ahora en torno a la curva cerrada, comenzando en *A* y terminando en *A* **(340)**. Dado que *A* pertenece también a la otra parte, lo elegiremos ahora como punto de partida, y trazaremos una curva cerrada nueva desde *A* hasta *A*.

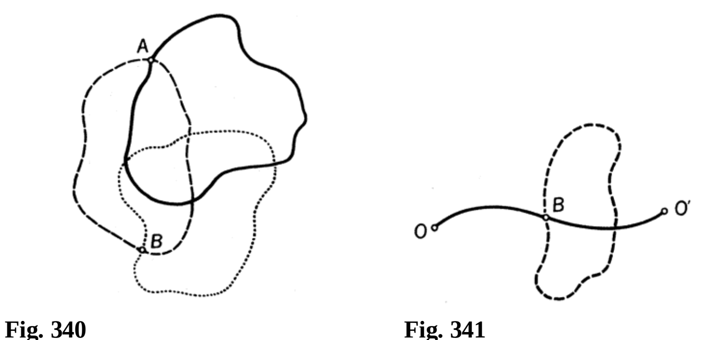


Fig. 340 **Fig. 341**

Es fácil ver que dos curvas cerradas con un punto común *A* se pueden considerar como una sola curva cerrada (como sucede con la cifra 8). Si

nuestra tarea no estuviera terminada todavía, esta nueva curva cerrada tendría que estar conectada en *B* con el resto de la figura. El razonamiento puede ser aplicado de nuevo, y acabará conduciendo a la solución. El caso de que existan dos puntos excepcionales de orden impar, se trata de modo similar. Basta comenzar en uno de los puntos excepcionales, *O*. Es evidente que cualquiera que sea el camino que elijamos concluirá en el otro punto excepcional *O'*. El resto de la figura carece de puntos excepcionales; por consiguiente, es una curva cerrada conectada en un cierto punto *B* **(341)** con el primer camino *O*—*O'*. Ahora podemos comenzar en *O*, recorrer el camino *O*—*O'* hasta *B*, trasladarnos en torno a la curva cerrada hasta regresar a *B*, y concluir el itinerario a lo largo del tramo *B*—*O'* del primer camino.

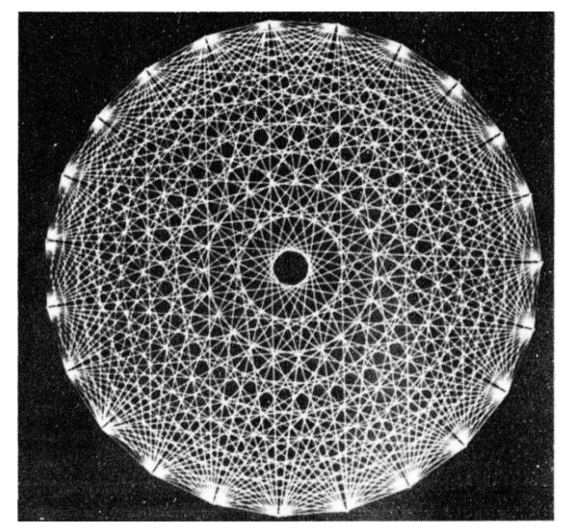


Fig. 342

Lo que vemos en **(342)** es un hilo blanco arrollado en torno a 23 clavos, lo que muestra un polígono de 23 lados con todas sus diagonales. Tenemos aquí una prueba de que este polígono, y todos los polígonos estelares de 23 vértices forman conjuntamente una única curva cerrada. El trabajo de arrollamiento exigió 45 minutos. El mismo truco sería imposible para un 24-gono, y exigiría un tiempo mucho mayor en el caso de un 25-gono. (¿Por qué?). A excepción de los clavos, el hilo no pasa por ningún punto más de dos veces.

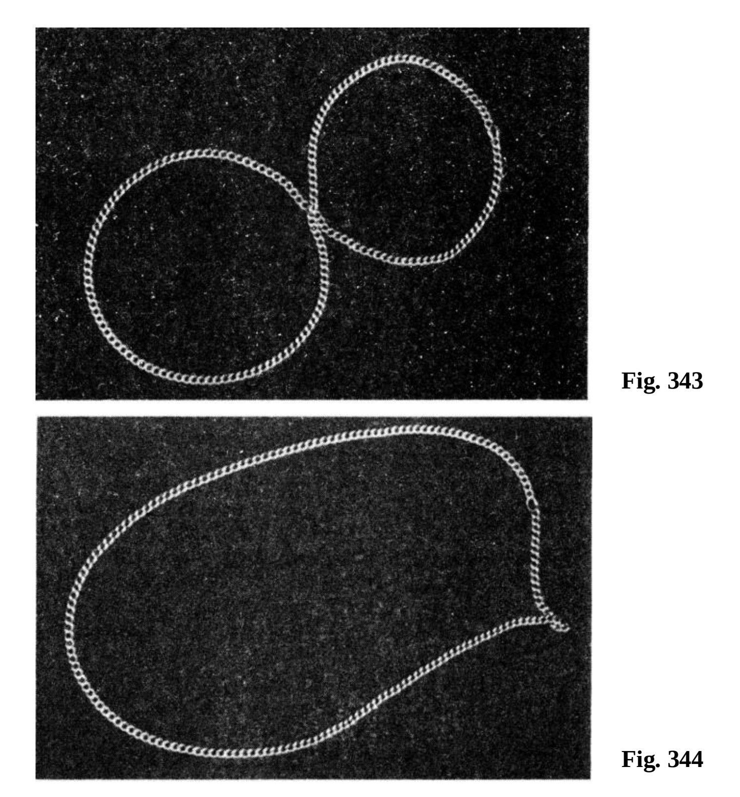


Fig. 343

Fig. 344

Fijémonos en una cadena cerrada **(343)** que se cruza a sí misma una sola vez. Si la arrastramos sobre la mesa, a fin de eliminar el cruce, tendremos que pasar por una fase **(344)** en que la cadena se «rompa», es decir, en que aparezca un punto anguloso. Para demostrar este aserto, fijémonos en la tangente **(345).** Cuando nos trasladamos alrededor de la cadena, el ángulo que forma con una dirección fija va variando, pero sus incrementos quedan cancelados por sus decrementos, y la variación total en el circuito completo es cero. Para una cadena sin cruces, la variación total es de 360°. Así, pues, tiene que haber una última posición de la cadena en la que la variación sea cero: se trata precisamente de la forma con punto anguloso, en el cual la

tangente cancela bruscamente la variación del ángulo adquirido a lo largo de todo el circuito.

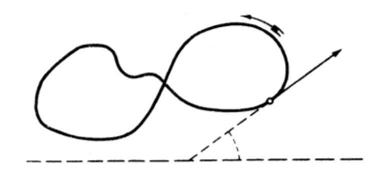


Fig. 345



Fig. 346

El dibujo **(346)** ilustra un problema diferente. Tenemos aquí tres casas, un palomar, un pozo, y un pajar. Es preciso trazar desde cada casa tres senderos, que vayan, uno al palomar, otro, al pozo, y otro, al pajar, y hacerlo de tal modo que los senderos no se corten uno a otro. El problema resulta imposible de resolver, pues si conectamos la primera casa con el palomar, el pozo y el pajar, y tras pasar por estos puntos proseguimos después por los senderos que los unen con la segunda casa, tendremos tres líneas que llevan de una casa a otra, y que nunca se cruzan. Como es obvio, estas líneas dividen el plano entero en tres zonas: C_1, C_2, C_3. Ahora bien, es seguro que la casa ha de encontrarse en una de las tres. Si se encuentra en C_1, se hallará más allá de la línea cerrada que contiene al granero; si en C_2, se encontrará en el interior de otra línea cerrada, mientras que el palomar se hallará en el exterior; y si en C_3, estará rodeada por una línea, fuera de la cual se encuentra el pozo. En el primer caso, la casa habrá de hallarse desconectada del pajar; en el segundo, del palomar; y en el tercero, del pozo.

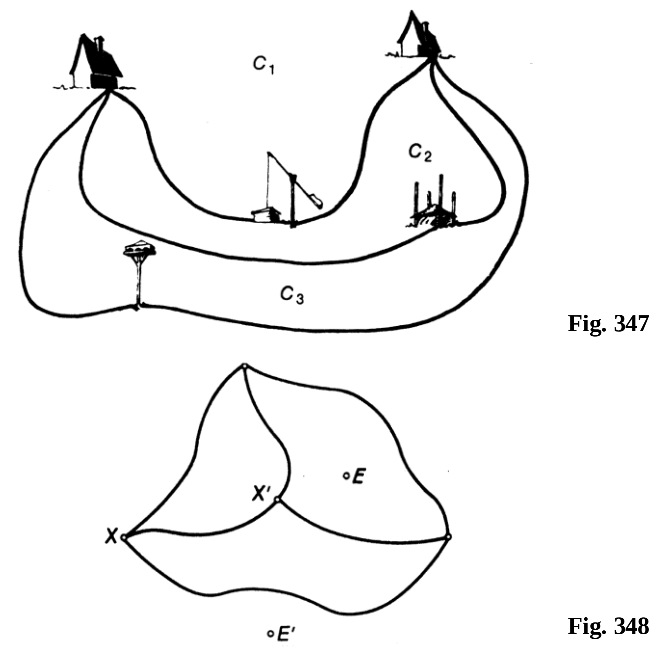


Fig. 347

Fig. 348

Imaginemos cuatro países, en los que cada par sean vecinos. Así, pues, sus capitales pueden ser conectadas mediante ferrocarriles, en los que cada tendido, en consecuencia, atraviesa solamente los territorios de las dos estaciones terminales. Comenzando con tres capitales, *A*, *B* y *C*, obtenemos una especie de triángulo. La capital *D* es, ya exterior, ya interior a este triángulo, uniéndola mediante líneas férreas con *A, B* y C, obtenemos, en ambos casos, un triángulo grande compuesto por tres piezas triangulares adyacentes. Fijémonos ahora en la capital *E* de un quinto país. Tiene que yacer **(348)** o bien en uno de los triángulos pequeños, o en el exterior del grande. En cualquiera de los dos casos, hay una capital *X (A*, *B*, *C*, o *D)* aislada de *E* por un triángulo de líneas de ferrocarril. Dado que estas líneas pasan en su totalidad por territorios que no pertenecen ni a *X* ni a *E*, la capital *E* no es vecina de la *X*. Así, pues, cinco países no son nunca vecinos de cada uno de los demás.

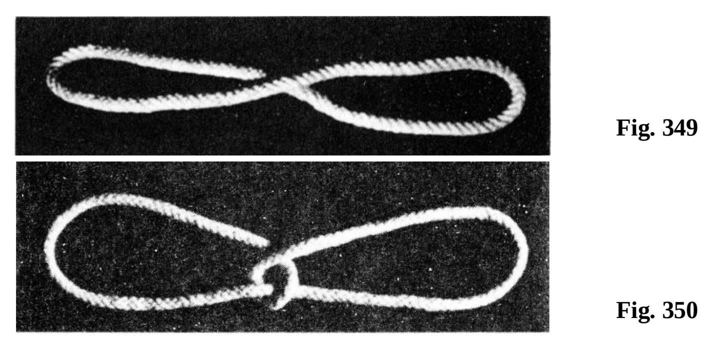


Fig. 349

Fig. 350

El nombre que recibe el capítulo de la geometría que estamos estudiando aquí es el de topología; la ciencia de los nudos también forma parte de ella. Un cordón cuyos extremos hayan sido conectados **(349)** permanecerá eternamente desanudado, si carecía de nudos antes de empalmarlo. Sin embargo, si inicialmente hubiera un nudo **(350),** nunca desaparecería **(351)** sin cortar la cuerda. El más sencillo de los nudos es capaz de adoptar dos formas distintas **(352),** que no se transforman la una en otra tirando de la cuerda sin cortarla. Cada una es la imagen reflejada en el espejo (imagen «especular») de la otra.

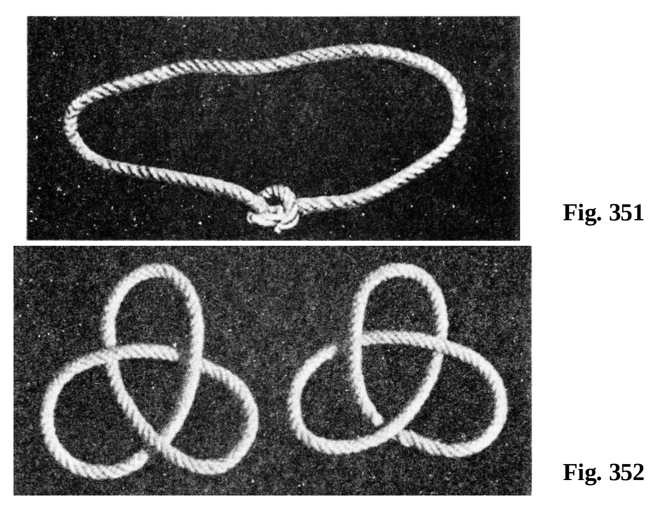


Fig. 351

Fig. 352

Es factible correr un nudo a lo largo de una cuerda tanto como queramos, pero es imposible anular sendos nudos, en los dos extremos de una cuerda, de tal modo que al llevarlos uno hacia otro se cancelen mutuamente. Se ha descubierto recientemente una demostración matemática de este hecho empírico.

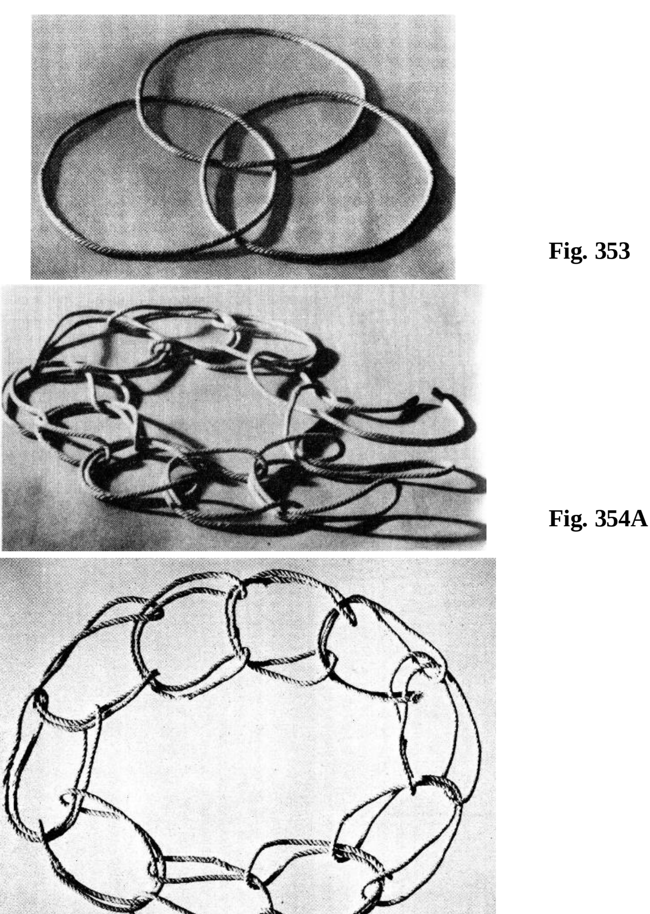


Fig. 353

Fig. 354A

Fig. 354B

Es fácil entrelazar tres curvas cerradas de modo que sea imposible separar el conjunto y sin que ningún par de ellas estén eslabonadas **(353)**; es fácil constatar que al cortar una cualquiera de ellas las tres quedan libres. Más todavía, es posible formar un modelo compuesto por un número cualquiera de curvas cerradas **(354A,B)** que tenga las mismas propiedades.

El dispositivo del dibujo **(355)**, llamado «baguenaudier», fue utilizado por los campesinos franceses de tiempos pasados. Su nombre, y su finalidad práctica, la de servir a modo de candados, se han perdido en la actualidad. El dibujo **(356)** muestra un cofre cerrado. Para alzar la tapa es necesario desenganchar la parte izquierda, la formada por aros, de la derecha. Al separar los anillos, y la barra de hierro que pende de ellos, se abre la cerradura, desplazando el mango hacia la derecha. Aunque la parte izquierda no está topológicamente trabada con la prolongación del mango, no es nada fácil liberarla. Existe, no obstante una solución: la característica interesante del baguenaudier estriba en el gran número de movimientos necesarios para desenganchar la pieza izquierda de la derecha, a pesar de la aparente simplicidad del dispositivo. Con 6 anillos ya implica una dificultad; con 12 serían necesarios centenares de movimientos. El número de piezas es muy pequeño al compararlo con el tiempo requerido.

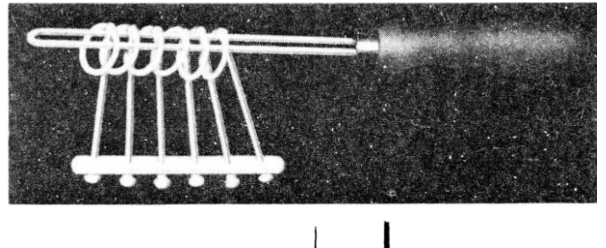


Fig. 355

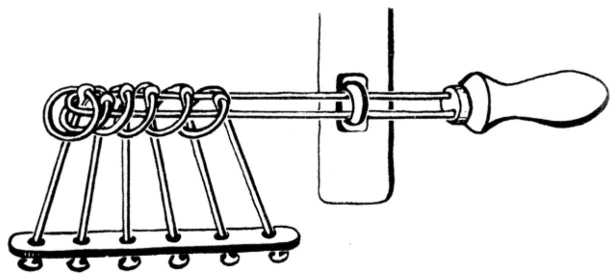


Fig. 356

Al pegar los extremos de una cinta de papel retorcida 180° resulta una superficie unilateral, o superficie de una sola cara, **(357)**, llamada cinta de Moebius. Una hormiga podría caminar por su totalidad sin el inconveniente de atravesar el borde, el cual forma una línea curva cerrada, pero no anudada.

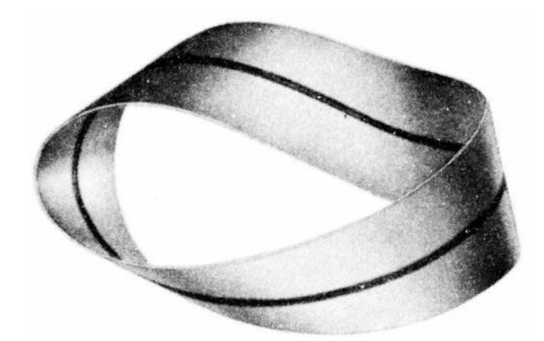


Fig. 357

El modelo **(357)** sugeriría que la rigidez del papel retorcido es una característica esencial de la cinta de Moebius, pero no es así.

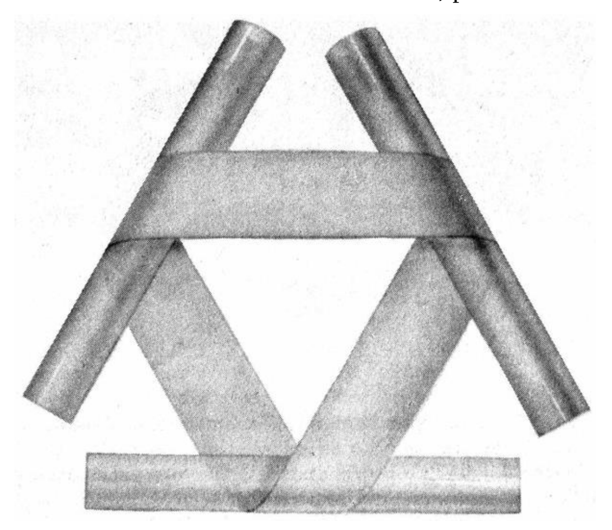


Fig. 358

Para contemplarla desde un mejor punto de vista, fijémonos en un modelo **(358)** formado por una cinta arrollada en torno a tres cilindros transparentes: sus ángulos se cruzan en ángulos de 60°, y es posible retorcer sin resistencia la cinta de seda, a pesar de que no es extensible. Este modelo revela que los habitantes de una cinta de Moebius podrían valerse de un sistema de paralelos y meridianos que se cortasen en ángulo recto. Los cartógrafos serían felices: sus mapas podrían ser planos; las longitudes de las curvas trazadas en ellos serían proporcionales a las longitudes verdaderas; los ángulos de los mapas serían iguales a los ángulos reales; y las superficies medidas en el mapa, proporcionales a las superficies de las regiones del planeta.

Si cortamos la cinta de Moebius a lo largo de la línea negra paralela al borde, no queda dividida en dos, sino que forma una superficie bilateral **(359)**. La cinta tiene ahora por márgenes dos líneas curvas cerradas; ninguna de ellas, individualmente, está anudada, pero sí eslabonada con la otra.

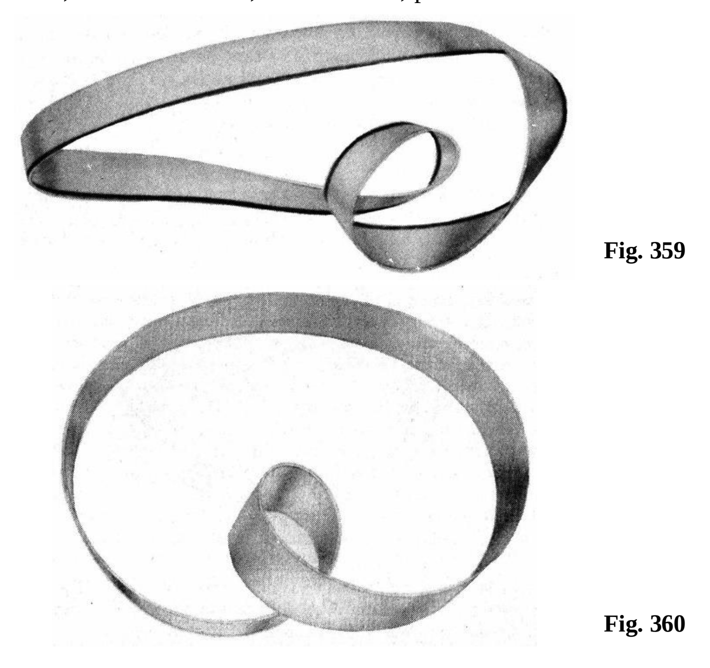


Fig. 359

Fig. 360

Obtendremos **(360)** una cinta más sencilla con las mismas propiedades (superficie bilateral, dos márgenes eslabonados, no anudados) retorciendo 360° una cinta de papel antes de engomarla, mientras que la primera cinta está retorcida 720°. Existe otra superficie que tiene exactamente las mismas propiedades que la cinta de **(360)**, a saber, su imagen especular. Cada una de las dos se transforma en la otra doblándola y retorciéndola, sin cortarla. La superficie, al ser cortada a lo largo de la línea central, genera dos cintas **(361)** eslabonadas una con otra: ambas son del mismo tipo que la superficie original.

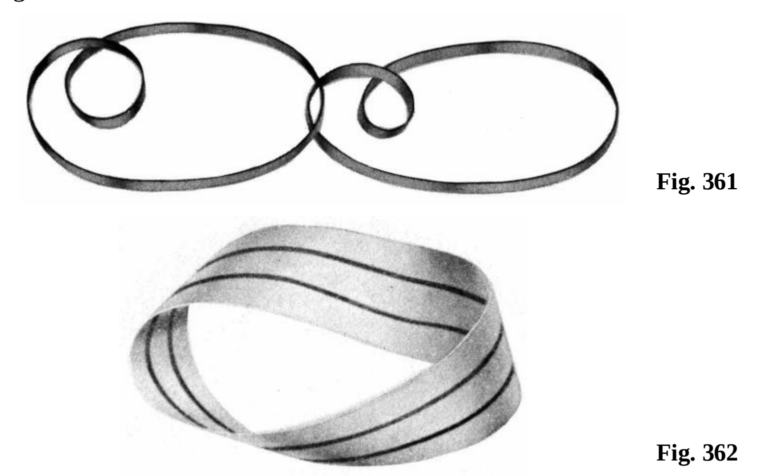


Fig. 361

Fig. 362

Trazando a lo largo de la cinta de Moebius una línea negra a una distancia del margen de un tercio de su anchura **(362),** y cortándola a lo largo de esta línea, se producirán dos bandas retorcidas **(363):** la menor es repetición de la primitiva, mientras que la mayor tiene la forma ya mostrada en la fotografía **(360)**. Si antes de pegarla retorcemos la cinta hasta tres medias vueltas, es decir, hasta 540°, el resultado volverá a ser una superficie unilateral **(364),** cuyo borde será una curva anudada, siendo el nudo del tipo trébol que vemos en la parte izquierda de **(352),** página 275. Una lámina ordinaria, como la hoja de una planta, por ejemplo, es bilateral, es decir, tiene dos caras, y su borde no está anudado. Se plantea entonces la siguiente cuestión: ¿existe una superficie bilateral cuyo borde sea una curva anudada? El

modelo que se muestra en esta misma página **(365).** El borde vuelve a ser un nudo, como el trébol de la izquierda de **(352).**

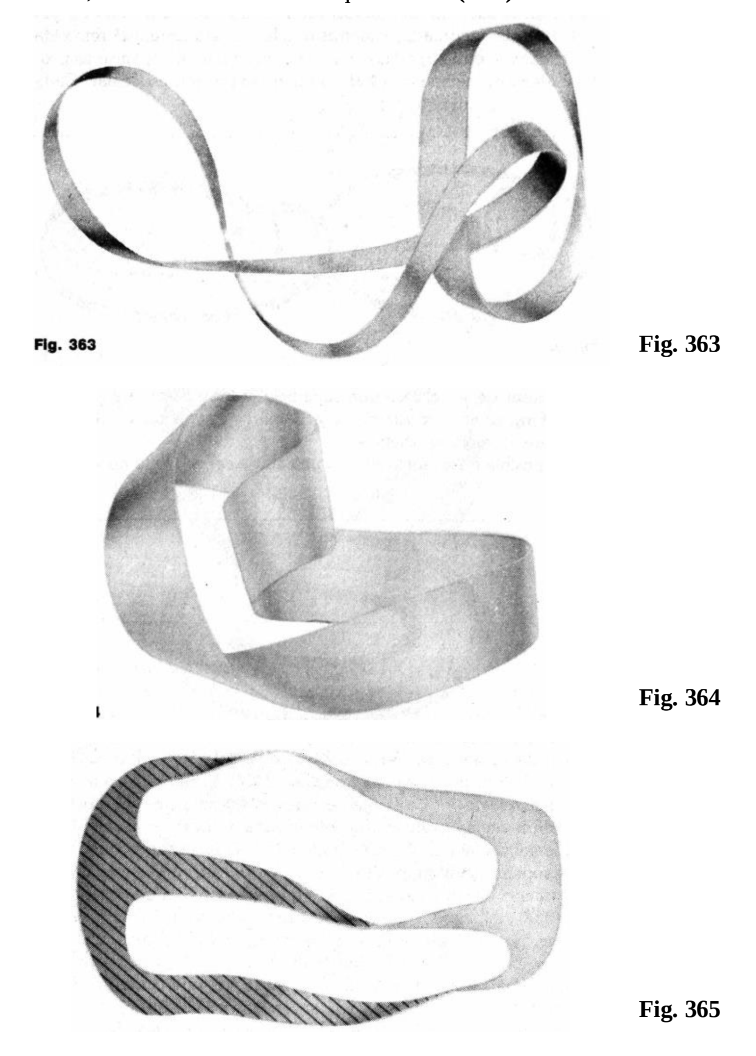


Fig. 363

Fig. 364

Fig. 365

Es bien sabido que con cuatro tonos de color se ilumina cualquier mapa trazado sobre el plano o la esfera, de tal modo que los países vecinos se distingan por sus diferentes colores. Este hecho no ha sido demostrado rigurosamente, pero experimentalmente se ha constatado que es así. En el caso de un toro **(366),** es decir, de una superficie con forma de neumático hinchado, podrían hacernos falta hasta un máximo de siete colores, ya que en esta superficie es factible un mapa que muestre siete países cada uno de ellos contiguo a todos los demás. Las vistas del toro, desde arriba y desde abajo **(367)** dan la disposición de los siete países.

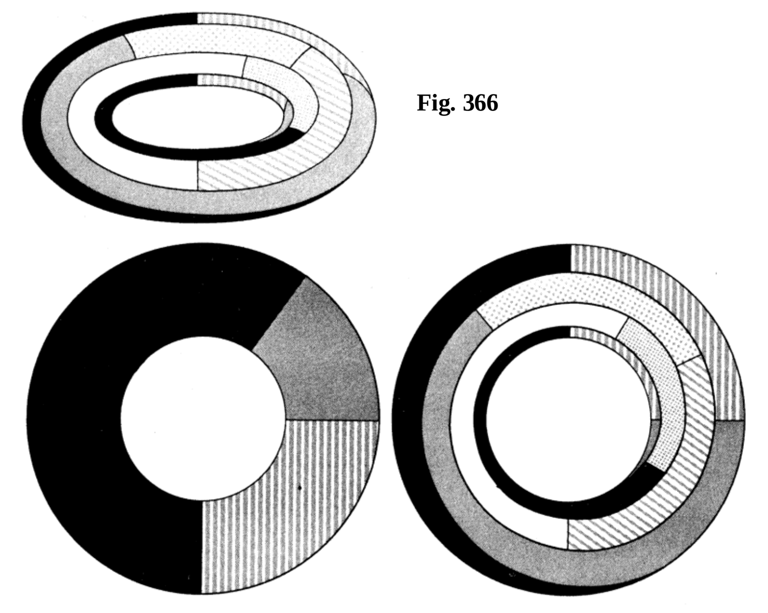


Fig. 366

Fig. 367

A pesar de ser el toro una superficie menos trivial que el plano o la esfera, se ha demostrado rigurosamente que, sobre él, siete colores son siempre suficientes.

Es posible trazar sobre el toro una curva cerrada que no se corte a sí misma y que sea idéntica al nudo **(368)** de la parte izquierda de **(352)**. Cortando el toro a lo largo de la línea negra, es decir, a lo largo del nudo, se obtiene una superficie de dos caras **(369)** que tiene dos bordes, los cuales están eslabonados y son nudos del mismo tipo que el primitivo. Para construirla directamente, hemos de retorcer una cinta tres revoluciones completas (1.080°), y anudarla antes de pegarla por sus extremos. Cabe obtener una superficie bilateral limitada por dos bordes anudados, pero no eslabonados, juntando **(370)** dos modelos de una forma descrita anteriormente.

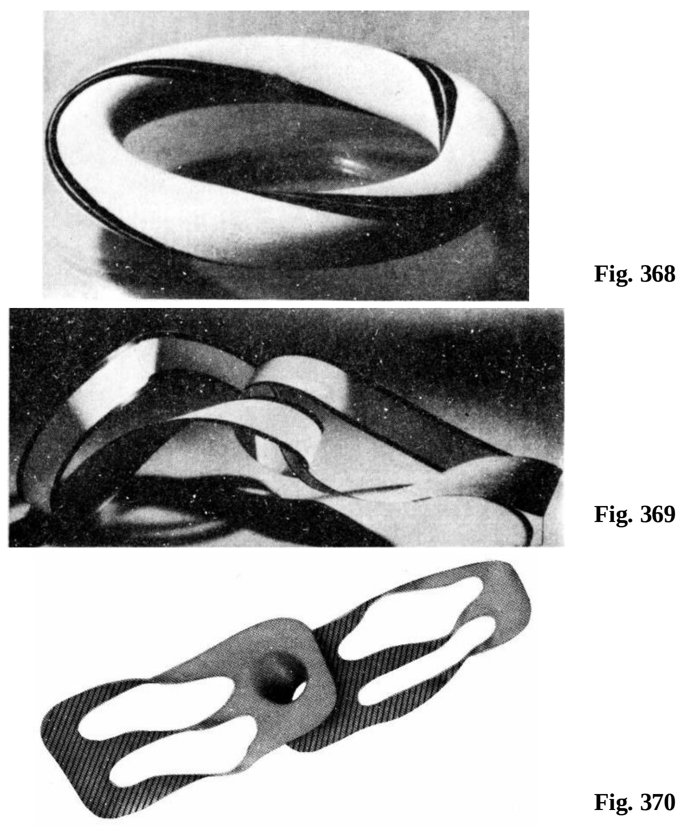


Fig. 368

Fig. 369

Fig. 370

Es posible **(371)** situar sobre el toro cualquier número de tréboles, como el de la izquierda de **(352),** sin que ninguno de ellos se corte ni a sí mismo ni a ninguno de los demás. No obstante, si disponemos sobre el toro los dos nudos de **(352)** se producirán 12 intersecciones **(372).**

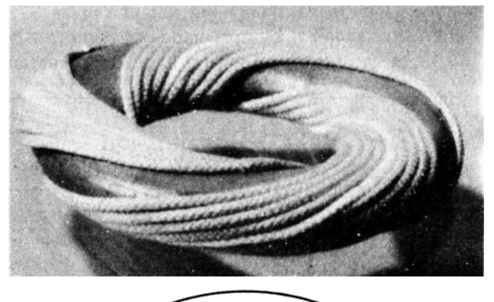


Fig. 371

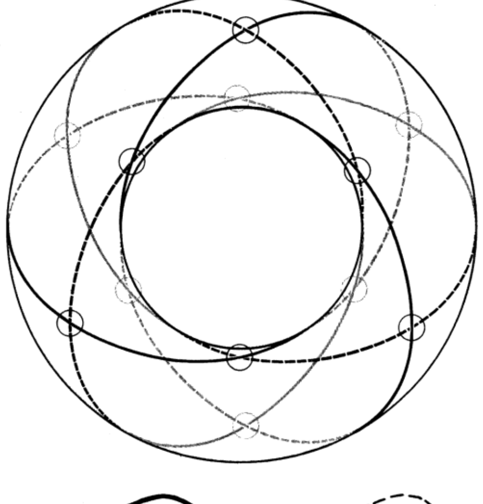


Fig. 372

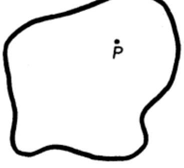




Fig. 373

Si una región plana de cualquier clase **(373A)**, de material elástico, se contrae hasta ocupar finalmente sólo una parte **(373B)** del área que cubría inicialmente, siempre habrá un punto (*P*) que ocupe después de la contracción el mismo lugar que tenía antes. La demostración, que se basa en la propiedad **(32-33)** de los tableros de ajedrez, está inspirada en una idea de W. Stozek. Imaginemos el tablero como en la región dada, y sea *Q* la posición del punto *P* tras la contracción. Diremos que una casilla es roja si para todo punto *P* perteneciente a este cuadrado, su correspondiente *Q* se encuentra más cercano al borde derecho del tablero que *P*; que es verde si ocurre lo anterior al cambiar «derecho» por «izquierdo», y que el cuadrado es amarillo si no es ni verde ni rojo. Es fácil comprobar que los cuadros de la columna izquierda no son verdes, y que los de la columna derecha no son rojos. Es igualmente fácil constatar que los cuadros verdes y los rojos jamás serán vecinos: éstos tienen siempre un punto, al menos, en común. Resulta así que si al rey le estuviera prohibido pisar los cuadros amarillos, le serían imposible trasladarse desde el borde izquierdo al borde derecho del tablero; y, consiguientemente, de acuerdo con la propiedad **(32-33)**, una torre podría moverse desde arriba abajo a lo largo de los cuadros amarillos. Se podría entonces trazar una línea que, pasando solamente por los cuadros amarillos, conectase el borde superior con la base. En cada punto de esta línea trazamos la flecha *PQ*. No todas las flechas están dirigidas hacia arriba (es decir, no todos los *Q* están más altos que los *P*), porque el punto *P* no puede pasar a ser un punto *Q* situado fuera del tablero.

El mismo razonamiento nos indica que no todas las flechas pueden estar dirigidas hacia bajo. La dirección de las flechas va cambiando continuamente a lo largo de dicha línea, y, por lo tanto, ésta contiene al menos un punto *P'* cuyo vector *P'Q'* es horizontal. A partir de la definición de cuadrado amarillo que contiene a *P'*, concluimos que existe también un punto *P"*, con vector *P"Q"* vertical, ya que, de lo contrario, todas las flechas de este cuadrado apuntarían en la misma dirección (hacia la izquierda o hacia la derecha) que *P'Q'*, y el cuadrado tendría que estar coloreado de rojo o de verde. Si el cuadrado es pequeño, tal cambio de dirección es imposible, a menos que la flecha *PQ* sea a su vez pequeña para todo punto *P* del cuadrado. Tomemos una división del cuadrado en n^2 cuadraditos, y hagamos crecer n indefinidamente: alcanzaremos en el límite un punto P_0 donde P_0Q_0

se anule (es decir, $P_0 = Q_0$) lo que significa que la contracción no altera la posición de P_0.

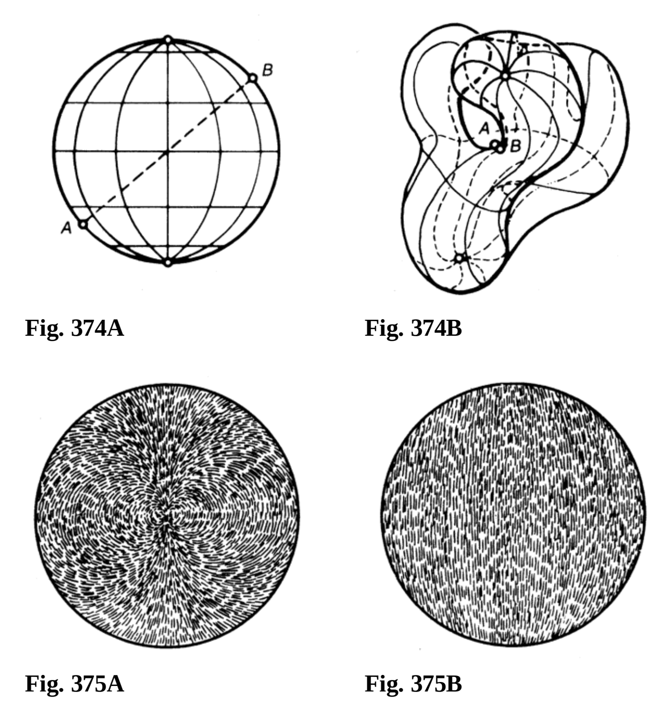


Fig. 374A **Fig. 374B**

Fig. 375A **Fig. 375B**

Si se deforma y distorsiona una esfera de tejido elástico (sin desgarrarla), hasta dejarla plana, habrá necesariamente dos antípodas, *A* y *B*, que llegarán a quedar uno sobre el otro en la nueva situación **(374A,B)**. Este teorema tiene una curiosa consecuencia: en todo momento hay en nuestro planeta un par de puntos antípodas que tienen la misma temperatura y la misma presión atmosférica. Es imposible peinar uniformemente una esfera peluda: siempre tiene que hacer al menos un remolino **(374A,B),** en el cual el pelo no presente una dirección definida.

No hay diferencia topológica entre la superficie corporal de una jirafa y la de una cebra. Así, pues, el problema de pintar franjas blancas sobre el

pelaje es el mismo en ambos casos. No obstante, la naturaleza ha encontrado soluciones diferentes **(376, 377).**

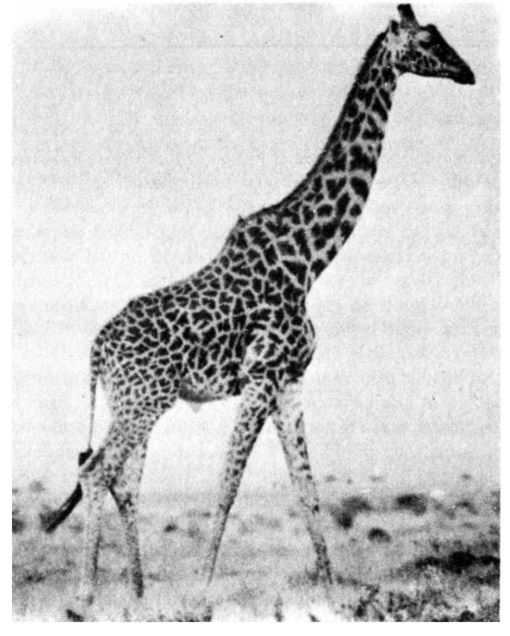


Fig. 376

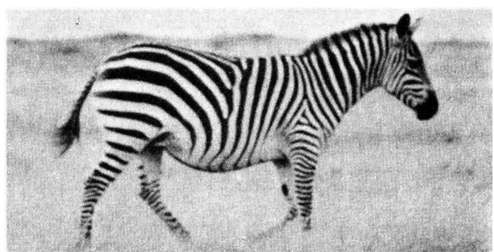


Fig. 377

13. La tabla de la fortuna, ranas, estudiantes y girasoles

Las leyes de la naturaleza dan lugar a diversas curvas. En el diagrama **(378)** las líneas curvas muestran la relación entre la presión *P* y el volumen *V* de un kilogramo de gas. Las líneas gruesas son isotermas, es decir, líneas donde la temperatura del gas es constante. Según la ley de Boyle y Mariotte, estas curvas son hipérbolas. El hidrógeno (H_2) está representado por dos isotermas, una correspondiente a 0º, la otra, a 77°. La ley de Boyle y Mariotte afirma que PV = constante.

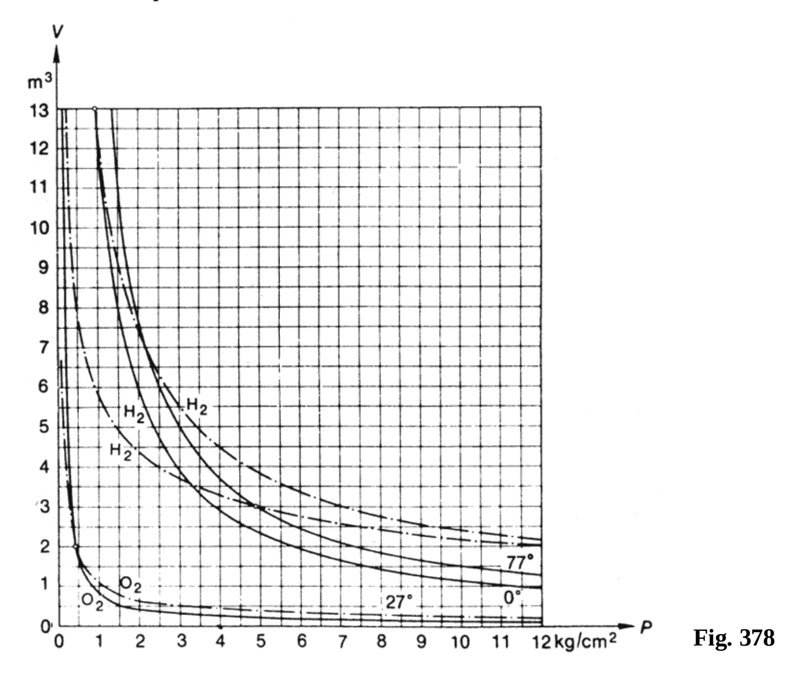


Fig. 378

Las líneas de puntos aparecen cuando en cierto momento (el punto representado en el diagrama por un circulito), el recipiente es rodeado por una

envoltura refractaria al calor. En tal caso, la temperatura varía de acuerdo con el decrecimiento o crecimiento de la presión, y obtenemos líneas adiabáticas: se trata de hipérbolas generalizadas ($P^a \times V^b = k$, una constante). Si representamos gráficamente P y V respecto de ejes logarítmicamente graduados [véase **(101)**], todas las líneas **(379)** se convierten en líneas rectas.

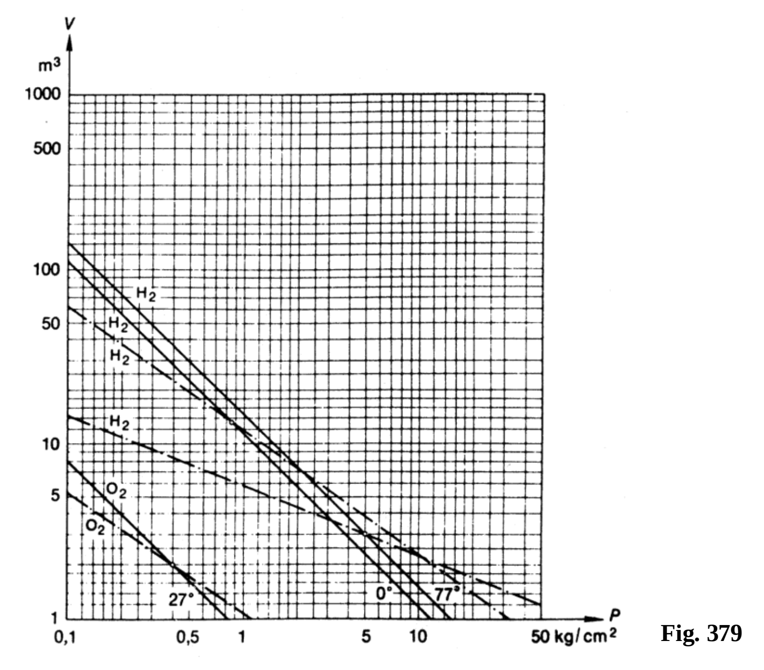


Fig. 379

La figura siguiente **(380)** muestra un sistema de isletas, con canales de paso entre ellas. Imaginemos que se trata del plano de una ciudad. La gente que llega a ella duda en cada bifurcación, tratando de averiguar si deben tomar la calle de la derecha o de la izquierda. Al principio no hay más que una calle, y, por consiguiente, no hay elección. En lo que se refiere a las dos calles siguientes al ir en dirección NS, una persona toma la que va hacia el oeste, evitando la primera calle a su izquierda; si evita la que se abre a su derecha, irá por la calle que se orienta hacia el este.

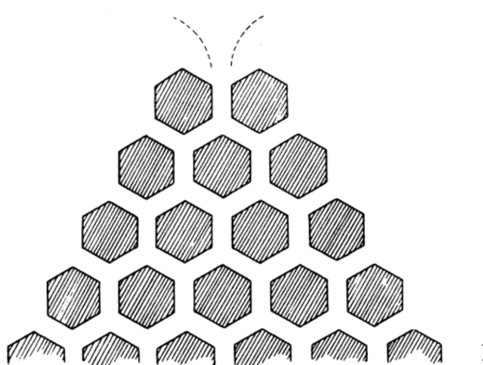


Fig. 380

Indiquemos estas posibilidades como 1, 1. Seguidamente tenemos tres calles *NS*. Tan sólo la persona que antes optó por ir hacia la izquierda podrá entrar por la calle situada totalmente al este, posibilidad que indicaremos como 1. Para entrar en la calle central hay dos posibilidades: cancelar la primera elección a la izquierda y eligiendo ahora ir a la derecha, o bien, la persona que antes optó por ir a la derecha decide ir a la izquierda. En lo que toca a la calle más al oeste, hay únicamente una posibilidad de llegar a ella. Las posibilidades anteriores pueden denotarse 1, 2, 1. Sumando los números vecinos, a partir de 1, 2, 1 obtenemos 1, 3, 3, 1, que, como es obvio, representa todas las posibilidades correspondientes a las cuatro calles siguientes. Prosiguiendo de igual manera obtenemos el triángulo de Pascal:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

La última línea de esta tabla representa el número de modos mediante los cuales la gente puede alcanzar la primera, la segunda... la décima calle

de la décima hilera. El número total de posibilidades de esta hilera es 1+9+36+84+126+126+84+36+9+1 = 512 = 2^9.

En antropología, la estatura humana, por ejemplo, se considera como el resultado de muchas causas que intervienen en el curso de su desarrollo, algunas de las cuales tienden a aumentar la estatura, y, otras, a rebajarla. Imaginemos a cada individuo lanzando una moneda para decidir si añade a su estatura un centímetro más, o si renuncia a la que ya ha alcanzado. Si hubiera 512 personas, y a cada una se le permitiera lanzar nueve veces la moneda, vaticinaremos, por analogía con el ejemplo de la gente que atraviesa la ciudad, lo que probablemente ocurriría. Equiparemos cada decisión de crecer otro centímetro a la decisión de ir hacia la izquierda. Como hay 512 personas, agotaremos todas las posibilidades escritas en la última línea del triángulo de Pascal. Si llegaran a darse todas ellas, tendríamos una persona que sería 5 cm más baja que la estatura media; 9 que lo serían 4 cm; 36, 3 cm más bajos; 126 que rebasarían en 1 cm a la medida; 84 que la rebasarían en 2,...; y 1 que sería 5 cm más alta que la estatura media. Si hiciésemos formar a estas personas de modo que la más alta ocupe la primera fila, las que fueran un centímetro más bajas, la segunda, y así sucesivamente, tendríamos diez filas, y el ala derecha del escuadrón formaría una curva determinada por los números de Pascal, siempre que la izquierda hubiera sido dispuesta en línea recta.

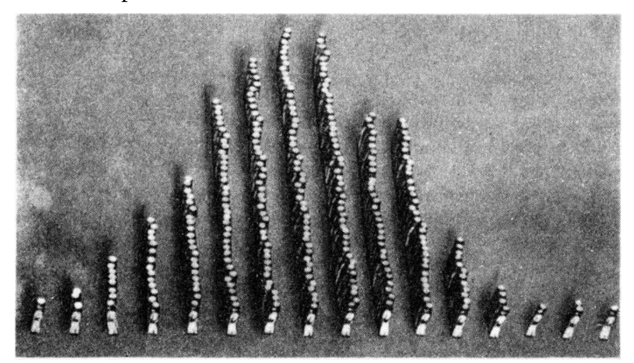


Fig. 381

Obtenemos así, de diversos modos, esta curva de Gauss. La dibujaremos, primero, tomando los números de Pascal como valores de las ordenadas; después haremos formar a todos los nuevos alumnos de la Universidad

de Princeton, de un curso dado, situándolos en columnas según su estatura **(381)**; finalmente, construiremos en madera una «tabla de la fortuna» (también llamada «tabla de Galton») **(382)**, compuesta por isletas hexagonales y canalillos entre ellas. Inclinemos la tabla, y vertamos diminutas bolas por el embudo de lo alto, que recogeremos en los cajetines situados bajo la última línea de canales. Comprobaremos así la ley de distribución de Gauss, determinando si la altura de las columnas de bolitas correspondientes a ensayos reales son más o menos proporcionales a los números de Pascal.

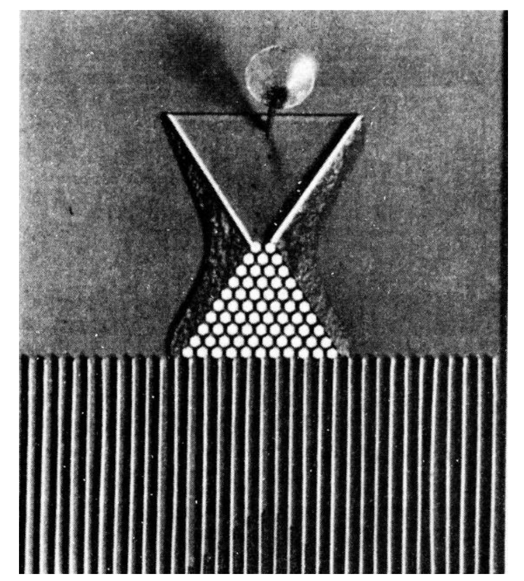


Fig. 382

Para simplificar este último experimento, utilizaremos una tabla sin isletas **(383, 384)**. Nos limitaremos ahora a dejar caer las bolitas desde un punto, y recogerlas en cajetines. El experimento equivale a utilizar una infinidad de isletas infinitamente pequeñas; la ley de Gauss exacta, de la cual el triángulo de Pascal no da más que una aproximación, tan sólo ha sido establecida matemáticamente para infinidad de causas infinitamente pequeñas, que actúan independientemente. De ahí que una tabla ordinaria, sin isletas, sirva mejor a nuestro propósito.

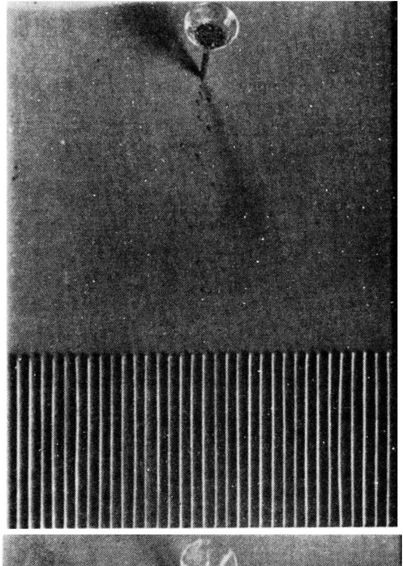


Fig. 383

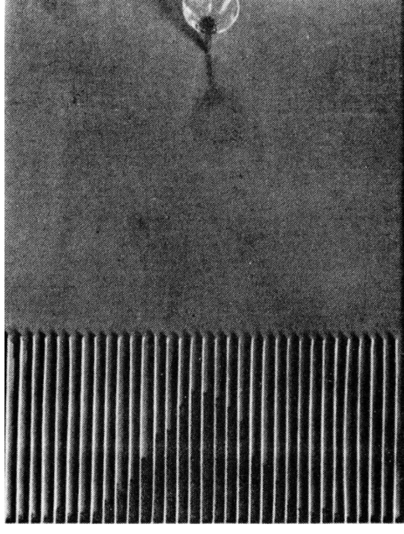


Fig. 384

Los experimentos de Trevan, relativos a la acción de la *digitalis* sobre una rana, muestran que de 100 ranas sometidas a inyecciones de digitalis, en cantidades indicadas por la escala (logarítmica) horizontal (dosis por cada 10 decagramos de peso de la rana), mueren tantas como se encuentren a la izquierda de la línea vertical correspondiente a esa dosis **(385)**.

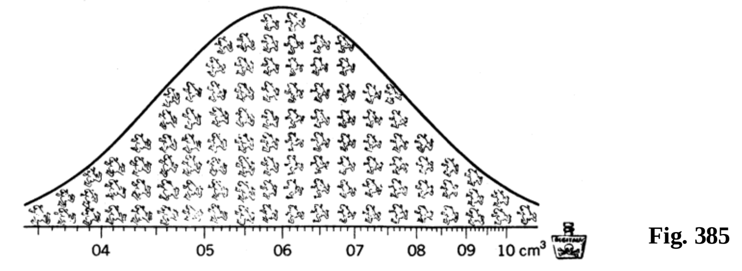


Fig. 385

Por ejemplo, una inyección de 0,4 cc. (por cada 100 gramos) será letal en 6 casos, mientras que una de 0,6 cc. será letal en 50 casos (¿cuál es la necesaria para matar 100 ranas?). Evidentemente, estas cifras son resultados medios, correspondientes a muchos ensayos. La «curva de las ranas» es, también en este caso, una curva de Gauss. Su ecuación es:

$$y = A \times 10^{c(x-b)^2} \quad (c \text{ es negativo}).$$

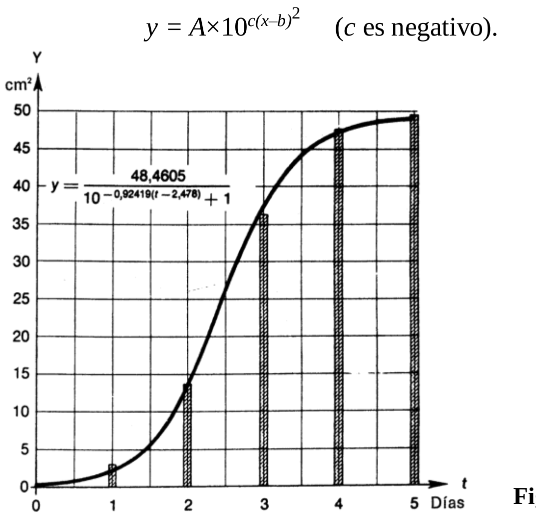


Fig. 386

En cuestiones relacionadas con el desarrollo de organismos dentro de espacios limitados encontramos otro tipo de curvas. Thornton descubrió que el incremento de población de las bacterias cultivadas en recipientes cerrados depende del volumen que ocupan, de modo perfectamente similar **(386)** al de los girasoles con respecto a la altura media (como muestran los experimentos de Reed y Holland) **(387)**, o el de los ferrocarriles americanos con respecto a la longitud total de la red **(388)**.

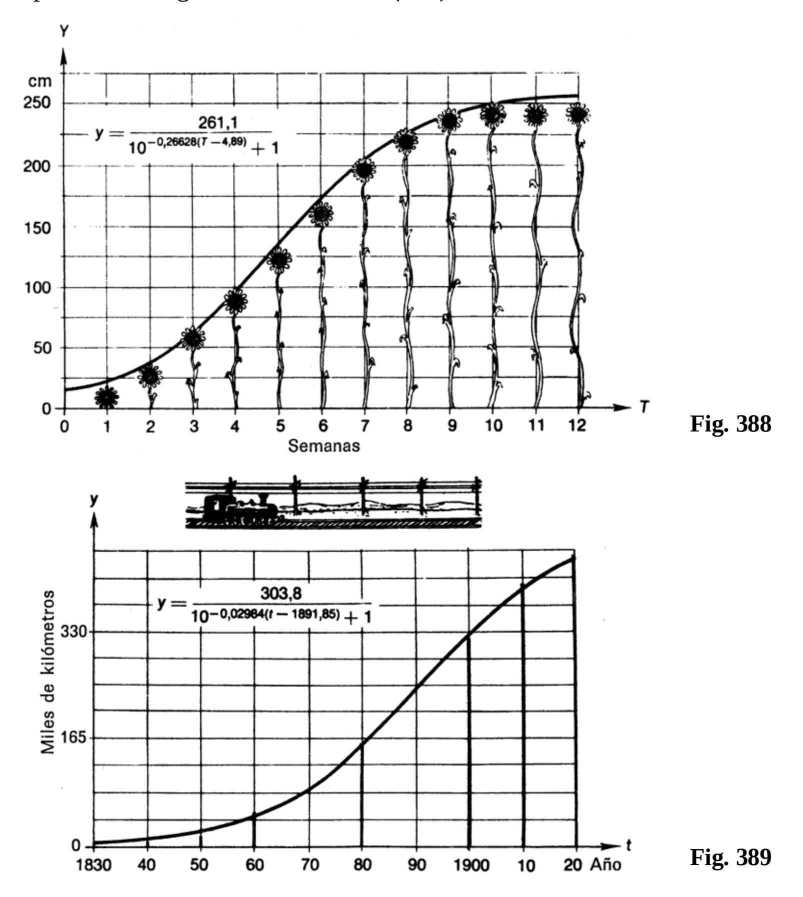


Fig. 388

Fig. 389

La causa de tal tipo de desarrollo estriba en que el incremento es proporcional al número de organismos ya vivientes, así como al espacio (decreciente) todavía disponible. Los dibujos muestran asimismo las leves discrepancias entre las curvas teóricas y las de los datos reales.

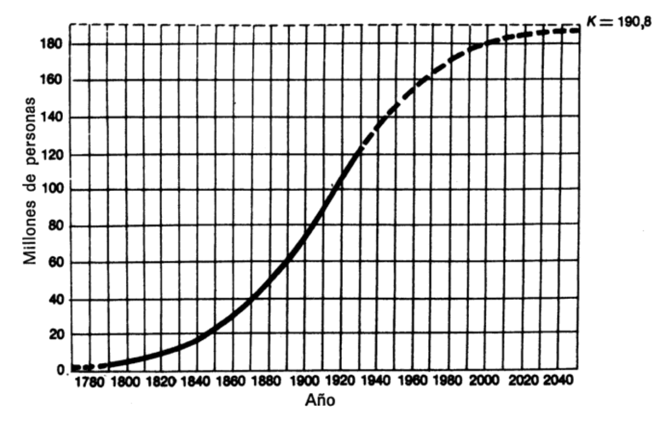


Fig. 389

La población norteamericana presenta la misma ley de crecimiento **(389)**; nos viene dada por la fórmula:

$$Y = \frac{190830{,}35}{1 - 10^{1{,}542035 - 0{,}01366265\,(t-1800)}}$$

(t denota el año, e Y es la población, en millares de personas). La curva muestra una inflexión; puede demostrarse que su límite superior, hacia el que tiene la curva cuando el tiempo tiende hacia infinito, se encuentra a doble altura que el punto de inflexión. Basándose en esa estimación, los estadísticos calcularon que el límite superior de la población de los EE.UU. sería de 160 millones. Nuestra curva de alrededor de 191 millones. Tal diferencia se debe a que es francamente difícil determinar la posición exacta del punto de inflexión: la curva verdadera consta de una serie de puntos individuales, que se conectan, por una curva continua, de muchas maneras. Piénsese lo que se piense de tales consideraciones, lo cierto es que al poco de alcanzarse el punto de inflexión fueron aprobadas leyes para detener la inmigración cabría resaltar otros síntomas en favor de la tesis de que el espacio disponible era limitado, y de que ya era percibido como tal.

Los censos de los últimos años indican que el crecimiento de la población ha superado los obstáculos que limitaban su tamaño.

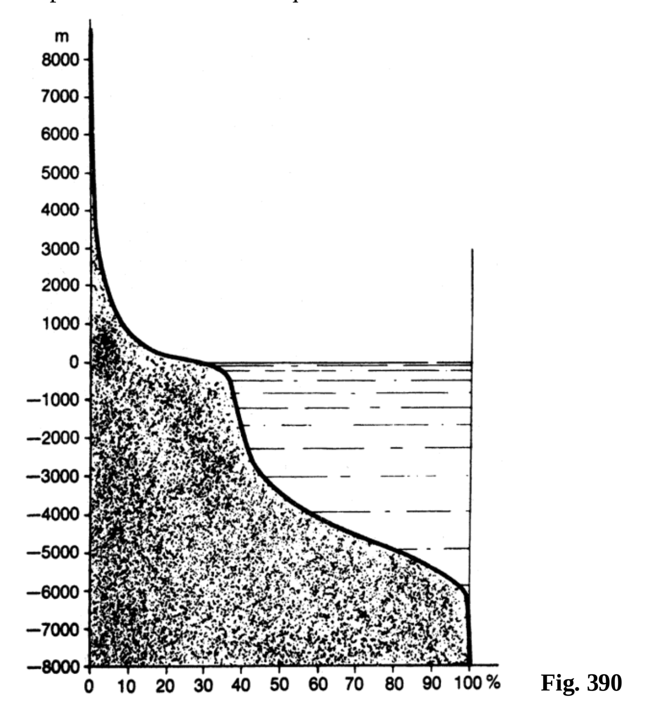


Fig. 390

Tenemos también otras muchas curvas en el dominio de las ciencias naturales, a pesar de que sus leyes no estén fundadas en deducciones teóricas. Por ejemplo, la curva **(390)** que muestra la distribución de tierras y mares a diversas altitudes (la escala horizontal indica que a una profundidad de 8.000 metros hay un 100% de tierra, y que, a la profundidad de 4.000 metros, esta proporción es sólo del 60%, que al nivel del mar es aproximadamente del 30%, y que, finalmente, a la altura de 9.000 metros sobre el nivel del mar hay 0 por ciento de tierra y 100% de aire.) Tenemos otro ejemplo en el gráfico **(391)**, que muestra la mortalidad de la población masculina en los EE.UU.

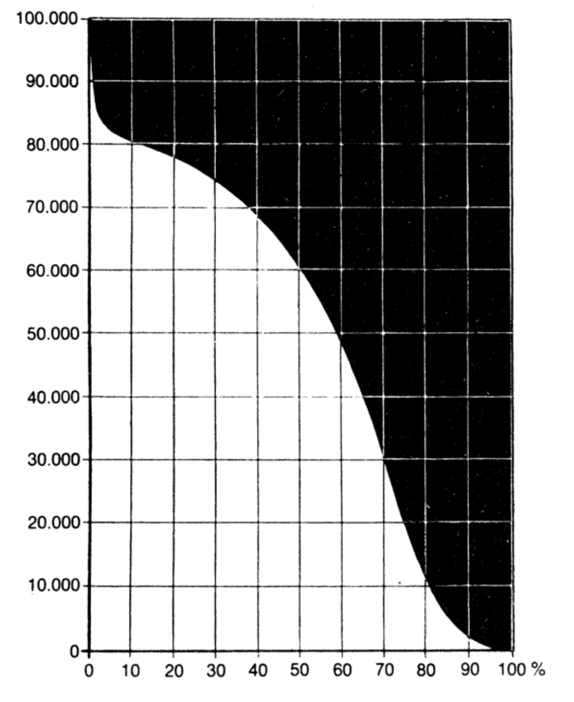

100.000
90.000
80.000
70.000
60.000
50.000
40.000
30.000
20.000
10.000
0
0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 %

Fig. 391

Notas

(Los números corresponden a las ilustraciones o al texto que las acompaña.)

(1) H. E. Dudeney, *Amusements in Mathematics,* Londres, 1927, p. 27.

(3) Pitágoras de Samos (c. 582-507 a. de C.), autor del teorema sobre los triángulos rectángulos, estudió el problema de las teselaciones regulares y la teoría de la armonía musical. Sin embargo, la disección mostrada es un logro hindú. El dibujo original lleva la inscripción «¡Mira!», que debería convencer al lector mejor que cualquier razonamiento verbal.

(5) Esta idea es del profesor J. Mikusiñski.

(8) F. Morley, «On reflexive geometry», *Trans. Amer. Math. Soc.* 8 (1907), pp. 14-24; J. M. Child, «Proof of Morley's Theorem», *Math. Gazette* 11 (1923), p. 171.

(9) T. Wazewski, in *Ann. de la Soc. Polonaise de Mathématique* 18 (1945), p. 164, cita como autor de la trisección al Sr. Rappaport, un abogado. El error es menor que 22'23"; para ángulos menores que 30°, el error es inferior a 1'.

(10) No hemos considerado el problema de que *todos* los cuadrados sean de tamaños diferentes. Para hacerlo más difícil todavía podríamos prescribir para el tamaño de los cuadrados un límite máximo, que los utilizados no pudieran rebasar.

(11) Esta descomposición del cuadrado fue dada por Z. Morón, en *Przeglad Mat.-Fiz.* 3 (1925), pp. 152-3.

(12) T. H. Willcocks publicó esta disección en la *Fairy Chess Review*, Vol. 7 (1948). R. Sprague, *Matemathische Zeitschrift* 45 (1939), pp. 607-8, fue el primero en descomponer un cuadrado en cuadrados diferentes. Sprague mostró cómo descomponerlo en 55 cuadrados. La imposibilidad de dividir un rectángulo en menos de 9 cuadrados ha sido establecida por H. Reichard y H. Toepken en *Jahresbericht des Deutschen Math. Vereinigung* 50 (1940), *Aufgaben und Lósungen,* pp. 13-14. Véase también «A note on some perfect squared squares», por T. H. Willcocks en *Canadian Journal of Mathematics* 3 (1951), pp. 304-8.

(13) H. E. Dudeney, op. cit., p. 27. J. G.—Mikusiñski, *Ann. Univ. M. Curie- Sklodowska.* 1 (1946), (Sección A), pp. 45-50 da la demostración gráfica (p. 49).

(16) W. Ahrens da la teoría de diversos juegos en *Mathematische Unterhaltungen und Spiele.* Leipzig, Teubner, 1910; pp. 172-176. *The Theory of Carnes and Economic Be ha vior* es el título de un libro de J. V. Neumann y O. Morgenstern (2? Ed., Princeton, 1947), en el cual la teoría de juegos es sometida a un profundo análisis matemático y lógico. Esta teoría

fue explicada de forma más sencilla por J. C. C. McKinsey, en su *Introduction to the Theory of Games,* New York, MacGraw-Hill, 1952.

(17) Dr. J. Berger, *Columbia Chess Chronicle*, 1888. Según el análisis de W. Hetper, la más larga defensa que pueden hacer las negras es como sigue:

Blancas	*Negras*	*Blancas*	*Negras*
1. D8C	A5AD	8. R3C	A3C
2. D5R	D3T	9. D1AD	R4T
3. D1R	D4C	10. D1TD	A5CR
4. D1AD	R8A	11. D8TR	A6TR
5. D4AR	A3TD	12. D×A+	A×TR+
6. D4CR	A3CD	13. D×A++	

(18) W. Massmann, Neue Leipziger Zeitung, 1936. Este problema se encuentra en un libro de F. J. Prokop, 1000 auserlesene Schachaufgaben, Prague, 1944, n° 423.

(19) Dr. K. Ebersz. Magyar Sakkvilag, 1940. El análisis fue dado por Duchamp y Haberstadt en L'Opposition et les cases conjuguées. París y Bruselas, Lancel & Legrand, 1930, p. 111, n° 244. Leonardo Torres-Quevedo construyó un autómata que, mediante rey y torre da mate al rey solo, (movido por un jugador humano) en un número mínimo de jugadas, a partir de una posición cualquiera; Scientific American Supplement 6 (1915), p. 296. La invención de dispositivos electrónicos como los utilizados en las modernas computadoras permite imaginar autómatas capaces de tareas muchísimo más complejas. (Véase Cybernetics, por N. Wiener, Wiley, New York, 1948. (Cibernética, Guadiana de publicaciones S.A. Madrid.)

(21) Se dice que este juego fue inventado por el famoso Sam Loyd. La teoría del juego fue dada por W. Johnson y W. E. Story, en American Journal of Mathematics 2 (1879), pp. 397-404.

(23-25). E. Zermelo: «Uber eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels», Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians, Cambridge, 1912, Vol. 2, pp. 501-4. H. Steinhaus, «Games, an informal talk», American Mathematical Monthly 72 (Mayo, 1965), pp. 457-468.

(26) En 1927, Fauquenbergue estableció que el número $2^{127}-1$ es primo. D. H. Lehmer ideó una máquina, de funcionamiento fotoeléctrico, que examina la divisibilidad de números gigantescos. Dicha máquina se exhibió en 1933, en la Century of Progress Exhibition, de 1933, en Chicago. El progreso que desde aquellas fechas han alcanzado las máquinas electrónicas de cálculo ha sido inmenso. Cf., artículo de J. E. Littlewood acerca de grandes números, en Math. Gazette 32 (1948), pp. 163-71; J. C. P. Miller y D. J. Wheeler, Nature 168 (1951), p. 838; H. S. Uhler, *Scripta Mathematica* 18 (1952), pp. 122-31. Ya no es posible evaluar debidamente el progreso aportado por las aplicaciones de los computadores en todas las ramas de la ciencia. Donald B. Guillies, «Three new Mersenne Primes», *Mathematics of Computation* 18 (1964), p. 93.

(28) H. Kowarzyk, H. Steinhaus, S. Szymaniec, «Arrangement of Chromosomes II». *Bull. Acd. Pol. Se. VI* 14 (966), pp. 401-404.

(29) H. Iwaniszewski, «Stellar magnitude in the Aquila field», *Stud. Soc. Se. Torunensis,* F., Vol. 1, p. 64.

(31) W. W. Rouse Ball, *Mathematical Recreations and Essays,* London, Macmillan & Co., 1939, pp. 165 y 171. También, Ahrens, óp. cit. pp. 255 y 293.

(32, 33) A. Hulanicki, siendo todavía estudiante en la Universidad de Wroclaw, descubrió una demostración sencilla del teorema relativo a «campos prohibidos», que ha sido publicado en *Wiadomosci Matematyczne.*

(33) Dudeney, op. cit., pp. 102-3; Ahrens, óp. cit. p. 381. El recorrido de caballo fue compuesto por un oficial ruso, Jaenisch; *Chess Monthly,* 1859.

(34) Leonhard Euler (1707-83), de Basilea, fue autor de varios centenares de artículos en los que tocó casi todos los dominios de la matemática elemental y superior. La imposibilidad de formar a los 36 oficiales fue demostrada por Tarry, Assoc. Fr. Avanc. Se., 1900. Véase también Bruck y Ryser, *Canadian Journal of Math.* 1 (1949).

(35) R. A. Fisher, *The Design of Experiments,* Edinburgh, 1947.

(36) B. Gleichgewicht, J. Kucharczyk, H. Steinhaus, *Applicationes Mathematicae* 5 (1960), pp. 21-23.

(38) Platón (429-348), discípulo de Sócrates, discute la irracionalidad de 2 y de otros números. El lector puede consultar el libro de Richard Courant y Herber Robbins, *What is Mathematics?* Oxford University Press, 1946, cap. 2, § 2. *¿Qué es la matemática?,* Ed. Aguilar, Madrid.)

(41) Blaise Pascal (1623-62), geómetra y filósofo, inventor del barómetro, de una máquina de calcular, y del cálculo de probabilidades, aplicó la inducción matemática en su *Traite du triangle aritmétique* (1665). F. Maurolico (1495-1575) fue su predecesor en este método (1575), pero su obra ha sido olvidada.

(42) Hay una pila de sobres cerrados. Cada uno de ellos contiene una nota con la siguiente orden: «Abra el sobre siguiente, lea la orden que contiene, y ejecútela». En el sobre situado en lo alto de la pila leemos la orden siguiente: «Abra el sobre siguiente, lea la orden que contiene, y ejecútela». El principio de inducción matemática dice: Si alguien está decidido a obedecer la orden escrita en el primer sobre, se verá obligado a abrir todos los demás.

(43) Lord Rayleigh, *The Theory of Sound,* Londres, 1894-96. L. Euler (véase la nota 34) examinó el problema de la escala musical, haciendo notar que cuanto menores sean los números que indican la razón de los números de vibraciones, tanto mejores son los acordes. Claudio Ptolomeo (Alejandría, 140 a. de C.) tomó como punto de partida, de la octava, la quinta, y la cuarta, también la tercera mayor 5:4, y construyó una escala diatónica de intervalos: 9/8, 10/9, 16/15, 9/8, 10/9, 16/15. En este caso, todas las concordancias, juntamente con la tercera menor, están expresadas por números menores que diez, pero las segundas varían, pues una vez son 9/8 y la otra, 10/9. En un piano afinado de este modo, una melodía en Do mayor sonaría distinta que en Re mayor. La escala temperada fue introducida por el organista Andreas Werckmeister en 1691.

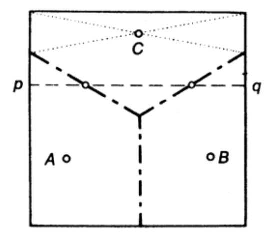
(45) J. Mikusinski examinó el problema de mejorar la escala musical, *Problemy* 1954. *Problemy* 10 (103) 1959, pp. 668-75.

(46) En su libro *Neue Lehre von den Proportionen des menslichilchen Kórpers,* (1854) A. Zeising atribuye a la sección áurea una importancia desmesurada.

(47) Leonardo Fibonacci vivió en Pisa en torno al 1200. La idea plasmada en el árbol ha sido sugerida por un artículo de E. Zylinski, en las actas del *Congreso Matemático Internacional* de Bologna 4 (1928), pp. 153-56. (Véanse también *Acta Soc. Botanicorum Poloniae* 5 (1928), pp. 380-91, donde D. Szymkiewicz analiza la llamada Ley de Ludwig, o papel de los números de Fibonacci en la botánica.)

(48) Palazzo della Cancellaria, en Roma.

(50, 51, 52, 53, 54) En (51), el área vigilada por *C* es de un octavo de la zona total de pasto; en (52) ya es de 1/4; si los vértices opuestos del prado fueran (0,0) y (1,1), el punto donde concurren las tres áreas tiene coordenadas 1/2, 5/8: en (53) el punto común es 1/2, 13/24: en (54), la máxima excursión de *A* es 505/48, la de *C,* 601/48, y el punto común es el mismo que en (53). Bankoff, de los Ángeles, propone otra solución en *The American Math. Monthly* 59 (Nov. de 1952), pp. 634-35. Sea *ABC* un triángulo equilátero; las prolongaciones de las tres alturas (desde el punto medio de los lados) dividen al cuadrado en tres partes iguales, cada una de las cuales queda a cargo de uno de los vaqueros (comenzamos la construcción con el segmento auxiliar *pq,* que divide al cuadrado en dos rectángulos, en



razón 2:1; por los puntos correspondientes a 1/4 y 3/4 de este segmento hacemos pasar sendas líneas rectas, que forman cada una 30° con la recta, y acabamos encontrando el punto *C* como intersección de las líneas de puntos). En esta partición: (I) las áreas son iguales, (II) las cabalgadas máximas son iguales para los tres vaqueros, (III) cada punto le está encomendado al vaquero más cercano, pero el principio (IV), que pide situar a cada vaquero de modo que su camino máximo sea mínimo, no es respetado. De entre nuestras cinco soluciones, tan sólo la primera, es decir, (50) tiene las cuatro ventajas I-IV; (51) tiene las II y IV; (52), II, III, y IV; (53) tiene I, II, y IV; mientras que (54) solamente posee las I y III. Bankoff considera que su división significa una mejora de la división (50), porque los desplazamientos máximos correspondientes son menores que los de (50). Pero esto no resuelve el problema de si entre todas las particiones que satisfacen la totalidad de

las condiciones I-IV, la solución (50) da o no da las mínimas cabalgadas máximas. ¿Comprende el lector el problema que se plantea? Véase también *Amer. Math. Monthly* 65 (Dic. 1958), p. 775.

(56) J. Schreier, *Mathesis Polska* 7 (1932), pp. 154-60.

(59) [x] denota aquí el máximo entero menor o igual que x. Así, por ejemplo, [5,7] significa 5, y [6] significa 6.

(61) C. A. B. Smith, «The counterfeit coin problem». *The Mathematical Gazette* 31 (1947), n° 293, pp. 31-39. Blanche Descartes descubrió un método más sencillo (*Eureka*, n° 13, Oct. 1950). A. M. Rusiecki ideó un nuevo método para descubrir monedas falsificadas por medio de tres pesadas, cuando se sabe que una de 14 monedas falsificadas es falsa (más pesada o más ligera que las demás) y no es de peso 0. Se colocan cada vez 5 monedas en la balanza:

a = (0, 6, 8, 10, 12) —(5, 7, 9, 11, 13)
b= (2, 4, 5, 7, 12) —(0, 3, 6, 11, 13)
c = (0, 4, 5, 10, 11)—(1, 2, 7, 8, 13)

Si el platillo izquierdo es el más pesado, ponemos a, b, c, iguales a+1; a–1 si lo fuera el derecho, y finalmente, 0 si ambos platillos están en equilibrio. Seguidamente calculamos: $n = (9a+3b+c)\,(-1)^{a+b+c}$. Si $n > 0$, entonces n designa el número de la moneda que es más pesada que las otras, si $n < 0$, el número $-n$ es el número de la moneda que es más ligera que las demás.

(62) M. C. Tweddle, en *The Mathematical Gazette 23* (1938), pp. 278-82, ha dado una solución gráfica al problema del vino; nuestro dibujo concreta una modificación de su idea.

(63, 64) Así ha sido observado por H. Auerbach y S. Mazur.

(65) B. Knaster y H. Steinhaus, *Ann. de la Soc. Polanaise de Mathématiques* 19 (1946), p. 228-31. H. Steinhaus, *Econometrica* 16 (1948), pp. 101-4.

(68) G. Krochmanly descubrió una división equitativa en tres partes, en Berdechow, en 1944. Al ser informada de ello, la Sra. L. Kolt descubrió otra solución. No fue posible publicar ninguna de las dos.

(69) G. Pólya, *L'Enseignement Mathématique* 4 (1919), pp. 355-79. La propiedad de los triángulos equiláteros de que la suma de las distancias a los lados sea constante, es un teorema de Viviani. El cambio de dirección de la flecha corresponde a la hipótesis de que la primera votación da un punto de la celdilla (1, 2, 2) que yace más arriba que el punto de la yacente en la celdilla (2, 2, 1) obtenida en la segunda votación. Ahora, el partido A perdería votos y ganaría un escaño, contrariamente a lo afirmado en el texto. La solución de esta dificultad: dijimos que es imposible que un partido que gane más votos pierda un escaño que vaya a parar a un partido que los pierda, pero no dijimos que fuera imposible que un partido que perdiera votos ganase un escaño. La flecha invertida significa que el partido A gana un escaño perdido por el partido C, el cual ha perdido votos también. No hay aquí contradicción alguna: un partido puede, a pesar de perder votos, ganar un escaño, a saber, el de otro partido que también haya perdido votos.

(71) Cf. nota (3) y H. Weyl *Symmetry*. Princeton University Press, 1952. *Simetría*, Ediciones de Promoción Cultural, Barcelona, 1975.)

(100) Esta cuestión es como las del Capítulo 12. Fue propuesta por el autor a sus alumnos, y resuelta por K. Florek, T. Dorozeinski, y J. Reszka.

(101, 102) El principio de la regla de cálculo fue dado por E. Gunter en 1623. En 1671, S. Partridge diseñó un instrumento similar a la regla de cálculo actual. Cuando el producto se sale del margen de las escalas, tendremos que colocar, frente al multiplicador, no el número 1, sino el 10.

(103) La nomografía fue descubierta por dos matemáticos franceses, Massau y M. P. Ocagne (1889).

(104) La ley de la lente fue descubierta en 1693 por Edmund Halley, famoso astrónomo británico (1656-1724).

(106) Marin Mersenne, que fue fraile mínimo, (1588-1648) llegó por vía experimental a la fórmula que expresa el número de vibraciones de una cuerda fuertemente tensa. La fórmula es válida para las unidades c. g. s. (centímetro-gramo-segundo).

(107) G. Pick, *Geometrisches zur Zahlenlehre Ztschrí. d. Vereines «Lotos»*, Praga, 1899; H. Steinhaus, *«O polu figur ptaskich», Przeglad Mat. -Fiz.*, 1924. ¿Cómo se podría formular la regla correspondiente para el espacio? Ivan Niven y H. S. Zuckerman. «Lattice Points and Polygonal Area», *Amer. Math. Monthly* 74 (1967), p. 1195.

(108, 109, 110) H. F. Blichfeldt, *Transactions of the American Mathematical Society* 15 (1914), pp. 277, 235.

(111, 112) M. Warmus, *Colloquium Mathematicum* I, 1 (1947), pp. 45-46.

(112) H. Minkowski, *Geometrie der Zahlen*. Leipzig, Teubner, 1912. Demostración simplificada: Hilbert y Cohn-Vossen, *Geometry and the Imagination*. Chelsea, New York, 1952. Este último contiene muchos y bellos dibujos y fotografías.

(113) Este problema fue propuesto y resuelto por G. Pólya. Nosotros hemos elegido un método de resolución diferente.

(115) W. Sierpiñski, *Bulletin de l'Academie des Sciences de Cracovie*. A (1912), pp. 462-78. El primero en determinar tales curvas fue G. Peano, un matemático italiano.

(121) Schnirelman, *Uspiechy Mat. Nauk*. t. 10 (1944), pp. 34-44. Este artículo había sido publicado ya, en 1929, en el boletín de la Sección de Matemáticas de la Academia Comunista, en Moscú.

(122) H. Steinhaus, *Mittelungen der Sachsischen Akad.* 82 (1930), pp. 120-30. *Prezeglad Geog.* 21 (1947) contiene una nota del mismo autor, donde la inclinación promedio g de un distrito se define por la fórmula $\tan g = h\Sigma L_i/B$, siendo B el área del distrito, h, la distancia vertical entre dos niveles consecutivos, y L_i la longitud del i-ésimo nivel. Cf. un artículo del mismo autor en las *Comptes Rendus de la Soc. des Sciences et des Lettres de Wroclaw*, serie B, 1949, donde se define la longitud de orden n se define de modo que sea aplicable a problemas geográficos.

(130, 131). El geómetra italiano L. Cremona y el físico inglés James Clerk Maxwell idearon, hacia 1875, la «estática gráfica», basada en el principio de las figuras recíprocas. Merced a este método de cálculo se ha simplificado mucho el cálculo de la construcción de estructuras de acero. Eiffel, el constructor de la torre parisiense de 300 metros, aplicó en su diseño estática gráfica.

(132) H. Steinhaus, «A bridge with a hexagonal framework», *Zastosowania Matematyki* 6 (1967), pp. 333-39.

(135-137) I. Grochowska, *Polska Akademia Umiejetnosci Wydwnictwa Slaskie Prace Biologiczne*, n° 2 (1950), pp. 1-72. Estos estudios sobre Hepaticae en el Beskid de Silesia incluyen un sumario en inglés. W. Steslicka-Mydalarska, *Ann. Uniw. M. C.-S. Sectio C:* II, 2 (1947), pp. 37-109 & I-VIII. Este método es obra de la Sección de Matemática Aplicada del Instituto Matemático Polaco, y es conocido por «taxonomía de Wroclaw».

(138) Apolonio de Pérgamo (cuyo esplendor se sitúa entre 247-205 a. de C.) estudió las propiedades de las secciones cónicas.

(140) M. Warmus, *Ann. de la Soc. Polonaise de Mathématique* 19 (1946), pp. 233-34, sin demostración.

(141) A. Zieba dio esta solución, sin demostración.

(144) René Descartes, el inventor de la geometría analítica, menciona esta espiral en una carta a Mersenne, en 1638. La espiral logarítmica se da en la naturaleza cuando un organismo crece de modo que conserve su semejanza con la forma que tenía en cualquier etapa anterior. Cf. D'Arcy W. Thompson, *Science and the Clas- sics.* Oxford University Press, 1940, pp. 114-47.

(145) La ecuación de esta espiral es $r = ae^{c\Phi}$ (donde e = 2,71828..., y c = 0,274411..., a arbitrario), siendo r la distancia desde el vértice, y Φ el ángulo definido respecto a una dirección fija. El curso del barco forma un ángulo de 74°39'12" con la línea de barco a vértice.

(150) Arquímedes (287-212 a. de C.), uno de los más grandes matemáticos de todos los tiempos, calculó la razón de la circunferencia a su diámetro con un valor correcto hasta la tercera cifra decimal; descubrió las leyes de los cuerpos flotantes, y los comienzos de la matemática superior. Cf. W. W. Rouse Ball, *A Primer oí the History of Mathematics.* 4ª edición, Macmillan & Co., Londres, 1895.

(151) H. T. Brown, *507 Mouvements mécaniques.* Lieja, Desoer, n° 96, 97.

(153) Peaucellier, un oficial de la Marina francesa, descubrió este montaje en 1864. Se anticipó Sarrus (*Comptes Rendus de l'Academie de París* 36 [1853], p. 1.036), quien enfocó el problema desde un ángulo diferente.

(156) L. Mascheroni, *Geometría del compasso.* Pavia, 1797. Napoleón I estudió este libro. Georg Mohr *(Euclídes Danicus,* Amsterdam, 1672), quien se anticipó a Mascheroni en las construcciones que sólo utilizan compás, está ya totalmente olvidado. Cf. Courant y Robbins, op. cit., Cap. III, pp. 147-52.

(157) H. Rademacher y H. Toeplitz, *The Enjoyment of Mathematics.* Princeton University Press (1957), p. 204.

(158) Adam Kochanski, jesuita polaco, publicó esta construcción en *Acta Eruditorum*, en 1685. Kochanski fue el primero en utilizar un muelle de acero para la suspensión del péndulo de los relojes.

(160) Cf. A. H. Stone y J. W. Tukey tratan de «teoremas sándwich generalizados» en *Duke Math. Journal* 9 (1942) pp. 356-59, y H. Steinhaus, *Fundamenta Mathematicae* 33 (1945), pp. 245-63.

(162) El gran astrónomo Nicolás Copérnico (1473-1543) demostró que los planetas describen círculos en torno al Sol, y que la Tierra también obedece a esta ley. Su obra, *De revolutionibus orbium coelestium*, fue publicada en 1543.

(165) Johann Bernouilli, uno de los fundadores de la matemática superior, nació en 1667. En 1696 planteó el problema de la braquistócrona, o línea de caída más rápida, resolviéndolo un año después. La velocidad angular de la rueda, su radio, r, y la aceleración g de la gravedad están ligadas por $g = rw^2$.

(170) Immanuel Kant, el gran filósofo alemán (1724-1804).

(171) Courant y Robbins, óp. cit., Cap. VII, § 8.

(173) Rademacher y Toeplitz, óp. cit.

(175) Un problema propuesto a los estudiantes universitarios rusos. *Uspiechi Mat. Nauk*, 3 (1948), n° 2 (24), p. 239.

La forma lenticular, aunque mantiene el contacto, no puede rodar sin deslizamiento, porque la longitud de su lado curvo no es igual a la longitud del lado del triángulo. Michael Goldberg, «Circular-arc Rotors in Regular Polygons», *American Mathematical Monthly*. Vol. 55 (1948), pp. 392-402; «Two-lobbed Rotors with Three-lobed Stators», *Journal of Mechanisms*. Vol. 3 (1968), pp. 55-60.

(176) Se han desarrollado, en Alemania y Estados Unidos, motores de pistones rotativos, inventados por Félix Wankel.

La curva (176) viene descrita por el punto (x, y) cuando $x = \cos t + 0{,}1 \cos 3t$, $y = \operatorname{sen} t + 0{,}1 \operatorname{sen} 3t$, donde t varía desde 0° hasta 360°. Se trata de curvas convexas, en las que es posible inscribir cuadrados giratorios de tamaño invariable.

(179) K Zindler («Über Konvexe Gebilde. II», en *Monatshefte f. Math. u Phays*. 31 (1921), pp. 25-29) observó que existían curvas sin centro en las que las cuerdas que dividían en dos mitades al perímetro dividían también en dos partes al área limitada por ellas. H. Auerbach, «Sur un probléme de M. Ulam concernant l'equilibre des corps flotants», in *Studia Mathematica* 7 (1938), pp. 121-22.

(180) Cf. note (41). Nicomedes vivió hacia el 200 a. de C.

(183) Rademacher y Toeplitz, óp. cit.

(184) Pintura de Bernardino Pinturicchio (1454-1513) que representa *El retorno de Ulises* (National Gallery, Londres); reproducción autorizada.

(187) H. Steinhaus, «Sur la localisation au moyen des rayons X», *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences* 206, mayo de 1938, pp. 1473-75. Cf. U. S. Patent Office n° 2.442,-

538, 11 de mayo de 1958: Método de localización de cuerpos extraños, y aparato para tal fin.

(193, 194) Inventado por J. Mikusinski.

(199) K. W. Pohle descubrió este teorema en 1858, publicándolo, en 1860, sin demostración. La demostración elemental fue dada por H. Schwarz en el *Journal f. reine u. angewandte Mathematik* 63 (1864), pp. 309-14.

(204) Haciendo girar rápidamente este modelo, vemos líneas negras de trazado inesperado, correspondientes a los puntos de intersección aparente de los lados en movimiento.

(211) El modelo ha sido inventado por C. H. Dowker e Y. N. Dowker, de la Universidad de Londres.

(224) M. Brückner, *Vielecke und Vielflache,* Leipzig, 1900, p. 130. El coseno del ángulo agudo del rombo es 1/3.

(277-232) Weyl, óp. cit.

(233-255) Cf. nota (38). Los volúmenes de los cinco sólidos regulares de arista a son: $a^3 \sqrt{}(2/12)$, a^3, $a^3 \sqrt{}(2/3)$, $a^3(15+7\sqrt{}5)/4$, $5a^3(3+ \sqrt{}(5/12)$.
Véase H. S. M. Coxeter*, Regular Polytopes,* Nueva York, 1949, p. 22.

(263) Las caras de este dodecaedro no pueden ser pentágonos *regulares,* a causa de la restricción cristalográfica. Véase Coxeter, óp. cit. p. 63.

(267) Ibíd. p. 69.

(273) Ibíd. p. 96.

(277) La imagen de la Luna (invertida, a causa del telescopio) fue tomada en el observatorio de París, el 26 de abril de 1898, a las 7:09 de la tarde.

(278) Una observación de M. Warmus.

(280) G. Mercator (1512-94). No existen proyecciones que dejen invariables las longitudes.

(287-290) R. Nowakowski descubrió el tercer cono. Zenobia Mazur ha descubierto otros muchos conos, por ejemplo, cono con teselaciones de forma triangular (74) o como los que se producen al conjuntar dos teselaciones de formas cuadradas. *Matematyka* n° 1 (29), 1954.

(296) La ecuación de esta curva es $y = a$ sen bx. La función seno fue introducida, en el siglo II d. de C., por el astrónomo alejandrino Ptolomeo.

(307) Este electrocardiograma fue tomado por H. Kowarzyk de la Academia Médica de Wroclaw. Kowarzyk es el inventor del aparato al que se alude en (308).

(309) Esta regla exige comentario. Suponiendo que se lleve un paso no demasiado vivo, uno tiene que limitar el alcance de la mirada. Salvo en tiempo tormentoso, los experimentos realizados en la costa del Báltico fueron satisfactorios cuando el caminante situaba la mirada tan sólo a los 100 metros inmediatos.

(310) Cf. nota (138).

(313) Las leyes de revolución de los planetas fueron descubiertas por J. Kepler (1571-1630), en 1609.

(320) Cuando *(a:b)/(c:d)* tiene valor constante distinto de 1, resulta un paraboloide hiperbólico distinto del dado en la construcción descrita en el texto.

(325) Esta superficie mínima se llama catenoide. Cualquier curva cerrada sumergida en disolución jabonosa nos dará una superficie mínima cuyo contorno es la curva. (C. V. Boys, «Soap Bubbles», *Romance and Science Series,* Londres 1924-25; se da también una receta para tales disoluciones).

(326) El descubridor de esta superficie fue W. Minding (1806-85), y F. Beltrami descubrió que los seres que habitaran en una superficie así no tendrían por geometría natural la geometría de Euclides, sino la no-Euclídea de Lobatchevski, en la cual la suma de los tres ángulos de un triángulo es siempre menor que dos rectos. N. Lobatchevski (1793-1856) y J. Bolyai (1802-60) descubrieron que existen geometrías lógicamente coherentes distintas de las del sistema euclidiano. (Cf. Courant y Robbins, óp. cit. Cap. IV, § 9).

(328) Coxeter, óp. cit. 5-12.

(333) Si un extremo de la nueva línea se encuentra en un vértice, y el otro produce un nuevo vértice sobre una línea ya dada, la V aumentaría en 1 y la C en 1; L aumentaría en *2*, y la fórmula $V+C = L+1$ seguiría siendo correcta. Pero si ambos extremos de la nueva línea formasen dos nuevos vértices sobre líneas ya dadas, la V aumentaría en 2, C en 1, y L en 3 (una línea nueva más partes de dos líneas dadas) —y la fórmula de Euler volvería a ser válida. Finalmente, puede ocurrir que la nueva línea se encuentre unida por uno de sus extremos a la red limitante, mientras que el otro extremo termina en el «campo», pero entonces la nueva línea no genera países nuevos, y F permanece invariable. Por otra parte, V y L aumentan simultáneamente en 1 —en el caso de que la nueva línea parta de un vértice, como en la figura (333), o bien V y L aumentan simultáneamente en 2, en el caso de que el punto inicial de la nueva línea caiga sobre un nuevo vértice. En ambos casos, la fórmula de Euler sigue siendo cierta.

(338) Cf. nota (34).

(347) J. B. Listing (1808-82) publicó en 1847 el primer libro de topología. Cf. Courant y Robbins, op. cit. Cap. V. La permanencia de los nudos fue demostrada por H. Schubert, *Sitzungberíchte del Heidelberger Akademie der Wissenchaften, Math.—Naturwiss. Klasse,* 1949, 3. *Abhandlung.*

(357) A. F. Móbius (1790-1863). La cinta de su nombre aparece en sus *Werke,* vol. *2* (1859), p. 519.

(365) F. Frankl y L. Pontriagin, *Mathematische Annalen* 102 (1930), pp. 785-89.

(366) El problema de los cuatro colores fue propuesto por Moebius en 1840. Philip Franklin ha demostrado que es verdadero para todos los mapas compuestos por menos de 35 regiones, *Journal of Mathematics and Physics* 16 (1937). pp. 172-84. Puede verse una demostración sencilla del teorema de Heawood, que enuncia que para todo mapa son suficientes cinco colores, en Courant y Robbins, óp. cit. Apéndice del Cap. V. Se ve una descripción

del teorema de siete colores en J. H. Caldwell, *Topics in Recreational Mathematics* (Cambridge University Press, 1966). Cap. 8. El teorema fue demostrado con la ayuda de potentes computadores, a finales de 1976, por K. Appel y W. Haken, (Véase «La solución del problema del mapa de cuatro colores» en *Investigación* y *Ciencia,* Dic. 1977, pp. 78-90).

(373) Propuesto por H. Lebesgue en *Mathemastische Annalen* 70 (1911), pp. 166 y sigs. La demostración no es suficiente. Demostrado por L. E. J. Brouwer en *Journal f. reine u. angewandte Mathematik* 142 (1913), pp. 150 y sigs.

(374) Propuesto por S. Ulam y demostrado por K. Borsuk en *Fundamenta Mathematicae* 20 (1933), pp. 177-90.

(375) L. E. J. Brouwer.

(378) La ley de las adiabáticas se debe a S. D. Poisson (1741-1840). La ley de Boyle data de 1662.

(380) Cf. nota (41). Los árabes ya conocían el triángulo en el siglo XIII (Ornar Khayyam). En Europa, G. Cardano escribió sobre sus propiedades en 1570.

(381) J. G. Smith y A. J. Duncan, *Sampling Statistics and Applications,* New York, McGraw-Hill 1945, pp. 137-52.

(385) J. B. Trevan. *Proceedings of the Royal Society,* B 101 (1927), p. 483.

(386) A. J. Lotka, *Elements of Physical Biology,* Baltimore, Williams and Wil- kins, 1925. Lotka da las siguientes referencias: p. 70; H. G. Thornton, *Annual of Applied Biology,* 1922, p. 265; p. 74: H. S. Reed y R. H. Holland, *Proceedings of the National Academy of Sciences,* 5 (1919), p. 140; p. 360. *American Reference Book,* 1914, p. 235, *World Almanac,* 1921, p. 227; *Statistical Abstraéis,* 1920, p. 814; p. 103: *Tables of Glover.* Valiéndose de las obras reseñadas, Lotka calculó las funciones; nuestros dibujos están basados en sus datos.

(389) F. E. Croxton y D. J. Cowden, *Applied General Statistics.* New York, Prentice Hall, 1946, Cap. 16. pp. 452-58; Gráfica 171, p. 457. La curva logística fue descubierta por el matemático belga Verhulst. Cf. Raymond Pearl, *The Biology of Population Growth,* New York, A. A. Knopf, 1925, Cap. XVIII.

INSTANTANEAS MATEMATICAS
HUGO STEINHAUS

A lo largo de más de cuarenta años, miles de lectores se han valido de este libro como introducción a los conceptos matemáticos.
Valiéndose de sorprendentes ilustraciones y diagramas, el autor explica con gran ingenio conceptos matemáticos de gran importancia, comenzando con algunos juegos y rompecabezas sencillos, y avanzando después hacia problemas más complicados.
«El gran mérito de los temas que Steinhaus ha elegido es que, además de ser deliciosos, nos dejan atónitos e intrigados... Este libro debería ser leído por los profanos interesados en las sorpresas y los retos intelectuales que las matemáticas más básicas pueden depararnos.»

Morris Kline

H. Steinhaus fue un eminente matemático polaco autor de numerosos artículos y trabajos de matemática pura y aplicada. Fue miembro de la Academia de Ciencias polaca.

